Электронный научный журнал (Online). ISSN 2303-9922. http://www.vestospu.ru

УДК 51(091)

**И. В. Игнатушина**

**Применение математического анализа к геометрии в исследованиях Л. Эйлера: вопрос об изгибании и развертывании поверхностей**

В статье рассмотрены исследования Эйлера по вопросу изгибания одной поверхности в другую, а также частного случая изгибания — развертывания поверхности на плоскость. Показано, как для решения чисто геометрического вопроса Эйлер применил средства анализа бесконечно малых. Представленный материал является иллюстрацией процесса формирования дифференциальной геометрии в XVIII в.

*Ключевые слова*: дифференциальная геометрия, Леонард Эйлер, теория изгибаний поверхностей, история математики.

В XVIII веке значительное место занимали задачи, связанные с приложениями к геометрии методов дифференциального и интегрального исчисления, которое уже было создано Исааком Ньютоном (1643—1727) и Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646—1716). Именно эти задачи привели к возникновению дифференциальной геометрии.

Огромную роль в создании дифференциальной геометрии сыграл Леонард Эйлер (1707—1783). Этот факт отмечали многие историки математики: Г. Вилейтнер [1], М. Я. Выгодский [2], Б. Н. Делоне [3], В. В. Котек [4], В. Коммерель [5], Б. А. Розенфельд [6,7], Д. Я. Стройк [8], А. Шпайзер [9], А. П. Юшкевич [10] и др. Проведенный нами анализ мемуаров Эйлера, вошедших в «Opera omnia», опубликованной переписки ученого [11], а также неопубликованных материалов из его записных книжек [12], хранящихся в Санкт-Петербургском филиале РАН, позволил доказать, что им были получены основополагающие результаты в указанной области.

К рассмотрению пространственных задач дифференциальной геометрии Эйлера привели проблемы картографии, геодезии и механики. В предлагаемой статье рассматривается вопрос об изгибании одной поверхности в другую в исследованиях Эйлера. Напомним, что изгибанием называется деформация поверхности, при которой длина каждой дуги любой линии, проведенной на этой поверхности, остается неизменной. Вопрос об изгибании поверхности является важным, поскольку если одна поверхность изгибается в другую, то их внутренние геометрии одинаковы. Частным случаем изгибания является развертывание поверхности на плоскость.

Результаты изучения вопроса о развертывающихся поверхностях Эйлер опубликовал в мемуаре «О телах, поверхность которых можно развернуть на плоскость» (1771, опубликован в 1772 г.) [13]. Здесь впервые было введено и само понятие развертывающейся поверхности, т.е. поверхности, которая может быть наложена на плоскость без складок и разрывов.

Эйлер исходил из того, что бесконечно малый треугольник на такой поверхности должен быть конгруэнтен соответствующему треугольнику на плоскости, на которую он развертывается. Он представляет координаты $x, y, z$ точки на поверхности (рис. 1) как функции от двух переменных $t$ и $u$, где $t$ и $u$ являются координатами соответствующей точки на плоскости. Таким образом, Эйлер ввел так называемые изометрические (или Гауссовы) координаты.

Точкам $(t+dt,\ u)$ и $(t,\ u+du)$ плоскости соответствуют точки поверхности, координаты которых имеют вид:

$$(x + ldt;\ \ y + mdt;\ \ z + hdt) \text{ и } (x + \lambda du;\ y + \mu du;\ z + \nu du),$$

где $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ являются функциями от переменных $u$, $t$ и удовлетворяют условиям:

$$l = \frac{\partial x}{\partial t},\ \ m = \frac{\partial y}{\partial t}, h = \frac{\partial z}{\partial t},\ \ \lambda = \frac{\partial x}{\partial u},\ \ \mu = \frac{\partial y}{\partial u}, \nu = \frac{\partial z}{\partial u}.$$

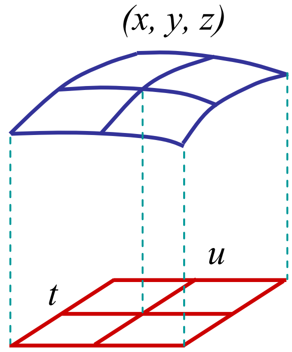



Рис. 1

Точке $(t + dt, u + du)$ плоскости соответствует точка поверхности

$$(x + dx, y + dy, z + dz),$$

тогда

$$dx = ldt + \lambda du\,,\ \ dy = mdt + \mu du\,,\ \ dz = ndt + \nu du\,,$$

причем чтобы выражения, стоящие в правых частях этих равенств, были полными дифференциалами, должны выполняться соотношения:

$$\frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\partial \lambda}{\partial t},\ \frac{\partial m}{\partial u} = \frac{\partial \mu}{dt},\ \frac{\partial n}{\partial u} = \frac{\partial \nu}{\partial t}\,. \tag{1}$$

В этой работе Эйлер впервые вводит в рассмотрение линейный элемент *ds* поверхности (т.е. дифференциал дуги линий на ней) как средство исследования тех свойств поверхности, которые впоследствии были названы внутренними и которые могут быть исследованы с помощью измерений на ней самой, без обращения к пространству, её содержащему. Эта идея получила дальнейшее глубокое развитие лишь начиная с Гаусса (1828, «Общие исследования о кривых поверхностях»).

Условие развертывания (или условие наложимости) поверхности на плоскость, полученное Эйлером, может быть сформулировано как условие совпадения линейного элемента развертывающейся поверхности $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ с линейным элементом плоскости $ds^2 = dt^2 + du^2$, т.е. при любых *du, dt* расстояние между точками (*t*+*dt, u*) и (*t, u*+*du*) плоскости должно равняться расстоянию между соответствующими точками $(x + ldt;\ \ y + mdt;\ \ z + hdt)$ и $(x + \lambda du;\ y + \mu du;\ z + \nu du)$ развертывающейся поверхности:

$$dt^2 + du^2 = (ldt - \lambda du)^2 + (mdt - \mu du)^2 + (hdt - \nu du)^2.$$

Раскрыв скобки, имеем:

$$\begin{aligned} dt^2 + du^2 = {} & l^2dt^2 - 2l\lambda dtdu + \lambda^2du^2 + \\ & m^2dt^2 - 2m\mu dtdu + \mu^2du^2 + \\ & h^2dt^2 - 2h\nu dtdu + \nu^2du^2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем условия наложимости:

$$\begin{cases} l^2 + m^2 + h^2 = 1, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \\ l\lambda + m\mu + h\nu = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Электронный научный журнал (Online). ISSN 2303-9922. http://www.vestospu.ru

С современной точки зрения — это условия единичности и ортогональности векторов, координаты которых равны частным производным радиус-вектора точки поверхности по координатам $u$, $t$.

Таким образом, поставленная геометрическая задача сводится к решению следующей чисто аналитической задачи: найти такие шесть функций $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ от двух переменных $u$ и $t$, чтобы выполнялись условия (1) и (2).

Решение этой задачи Эйлер нашел, основываясь на следующих геометрических соображениях: «…тела, поверхность которых может быть развернута в плоскость, должны быть так устроены, что из любой точки этой поверхности может быть проведена прямая, которая вся лежит в этой поверхности, и так, что две такие прямые, близкие друг к другу, лежат в одной плоскости, т.е., если они не параллельны, то они пересекаются в одной точке. Точки пересечения этих прямых образуют, очевидно, линию двоякой кривизны, такую, что все ее касательные образуют поверхность рассматриваемого тела» [13, с. 161].

Он рассматривает две близкие точки $V$ и $v$ пространственной кривой (рис. 2), проводит в них касательные $VS$ и $vs$ к кривой и обозначает точки пересечения этих касательных с плоскостью $(t,u)$ соответственно $S$ и $s$.

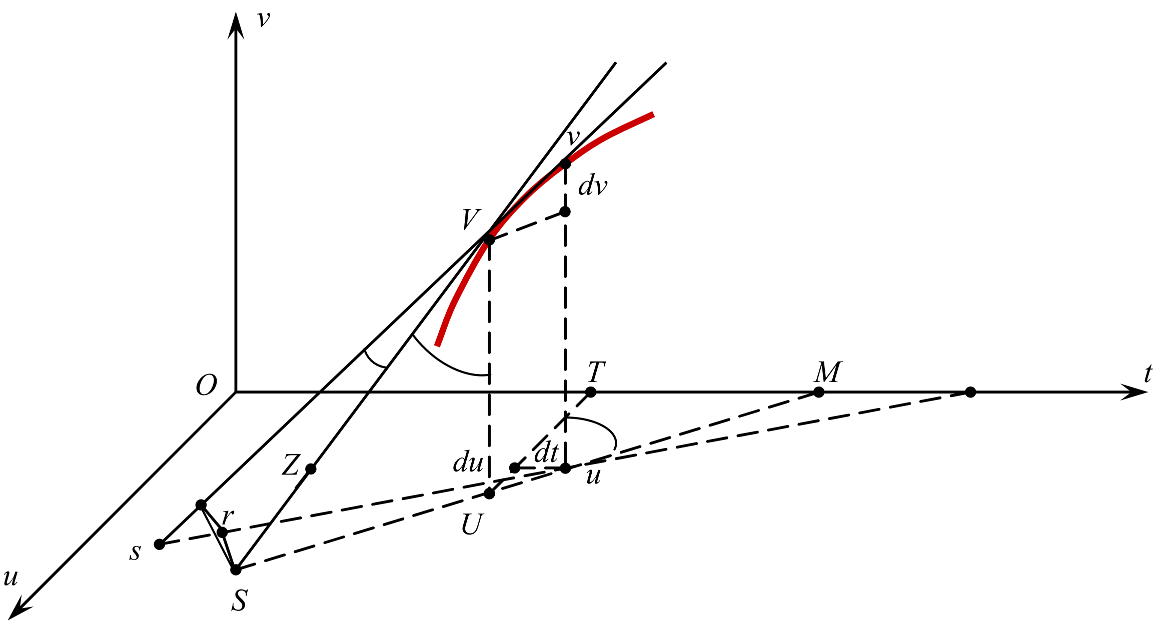



Рис. 2

Точки $U$ и $u$ плоскости $(t,u)$ соответствуют точкам $V$ и $v$ пространственной кривой. Далее Эйлер обозначает угол наклона прямой $SU$ к оси $Ou$, т.е. $\angle MUT$, через $\varsigma$; угол наклона прямой $VS$ к оси $Ov$, т.е. $\angle UVS$ — через $\vartheta$. Далее, полагая, что пространственная кривая задана уравнениями $u = f(t)$, $v = \varphi(t)$, он предлагает определять касательную к ней при помощи координаты $t$ ее точки касания $V$, а произвольную точку $Z$ на этой касательной — при помощи ее расстояния $s$ от точки $V$. Таким образом, $t$ и $s$ являются координатами произвольной точки $Z$ некоторой касательной к рассматриваемой пространственной кривой. Эти координаты связаны с координатами $x, y, z$ точки $Z$ следующими равенствами:

$$x = t - s\sin\vartheta\sin\varsigma;\; y = u - s\sin\vartheta\cos\varsigma;\; z = v - s\cos\vartheta.$$

Углы $\varsigma$ и $\vartheta$ будут для данной кривой некоторыми функциями переменной $t$. Обратно, если принять какие-нибудь две функции от $t$ за $\varsigma$ и $\vartheta$, то они зададут пространственную кривую с точностью до ее параллельного переноса.

В этой работе Эйлер показал, что искомое решение системы (2), удовлетворяющее условию (1), выражается функциями:

$$l = \sin\varsigma \sin\vartheta \sin\omega + \cos\omega \frac{d(\sin\varsigma \sin\vartheta)}{d\omega},$$

$$m = \cos\varsigma \sin\vartheta \sin\omega + \cos\omega \frac{d(\cos\varsigma \sin\vartheta)}{d\omega},$$

$$n = \cos\vartheta \sin\omega + \frac{\cos\omega d(\cos\vartheta)}{d\omega},$$

$$\lambda = \sin\varsigma \sin\vartheta \cos\omega - \sin\omega \frac{d(\sin\varsigma \sin\vartheta)}{d\omega},$$

$$\mu = \cos\varsigma \sin\vartheta \cos\omega - \sin\omega \frac{d(\cos\varsigma \sin\vartheta)}{d\omega},$$

$$\nu = \cos\vartheta \cos\omega - \frac{\sin\omega d(\cos\vartheta)}{d\omega},$$

где $\omega$ — угол между касательными $VS$ и $vs$, т.е. $\angle SVs$.

Затем он формулирует обратное утверждение: если взять такие функции $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, то поверхность $x, y, z$, где

$$x = \int(ldt + \lambda du),\ y = \int(mdt + \mu du),\ z = \int(ndt + \nu du),$$

вся состоит из прямых линий.

В этой же работе Эйлер сформулировал и доказал теорему о том, что всякая развертывающаяся поверхность является либо цилиндром, либо конусом, либо образована касательными к некоторой пространственной кривой.

Следует отметить, что рассмотренные результаты по развертывающимся поверхностям Эйлер получил около 1767 г. Об этом свидетельствует заметка из его записной книжки № 138 на листах 3 об. — 5 об. [12] (рис. 4—8).

В этой же записной книжке на листах 5 об. — 7 (рис. 9—10) Эйлер впервые вводит понятие, которому сейчас соответствует термин изгибание одной поверхности на другую, и ставит общую задачу о нахождении условий этого изгибания.

Требуется найти две поверхности, которые трансформируются одна в другую так, чтобы длина соответствующих линий между соответствующими точками сохранялась.

Рассмотрим решение Эйлера (изменив для удобства обозначения соответствующих точек на изгибаемых поверхностях). Пусть некоторая поверхность $\tau$ после изгибания превратится в поверхность $\tau'$ (рис. 3).

Точка $A(t,u,v)$ поверхности $\tau$ перейдет в точку $A'(x,y,z)$ поверхности $\tau'$. Эйлер отмечает, что по своей природе координаты точек поверхностей являются функциями от двух переменных $r$ и $s$.

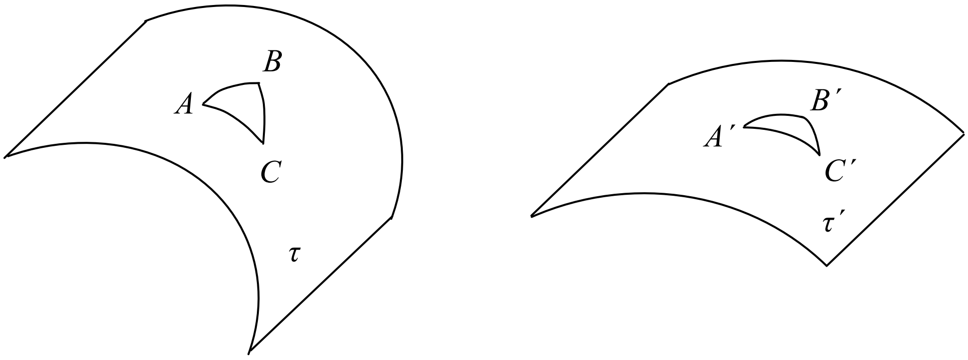



Рис. 3

Электронный научный журнал (Online). ISSN 2303-9922. http://www.vestospu.ru



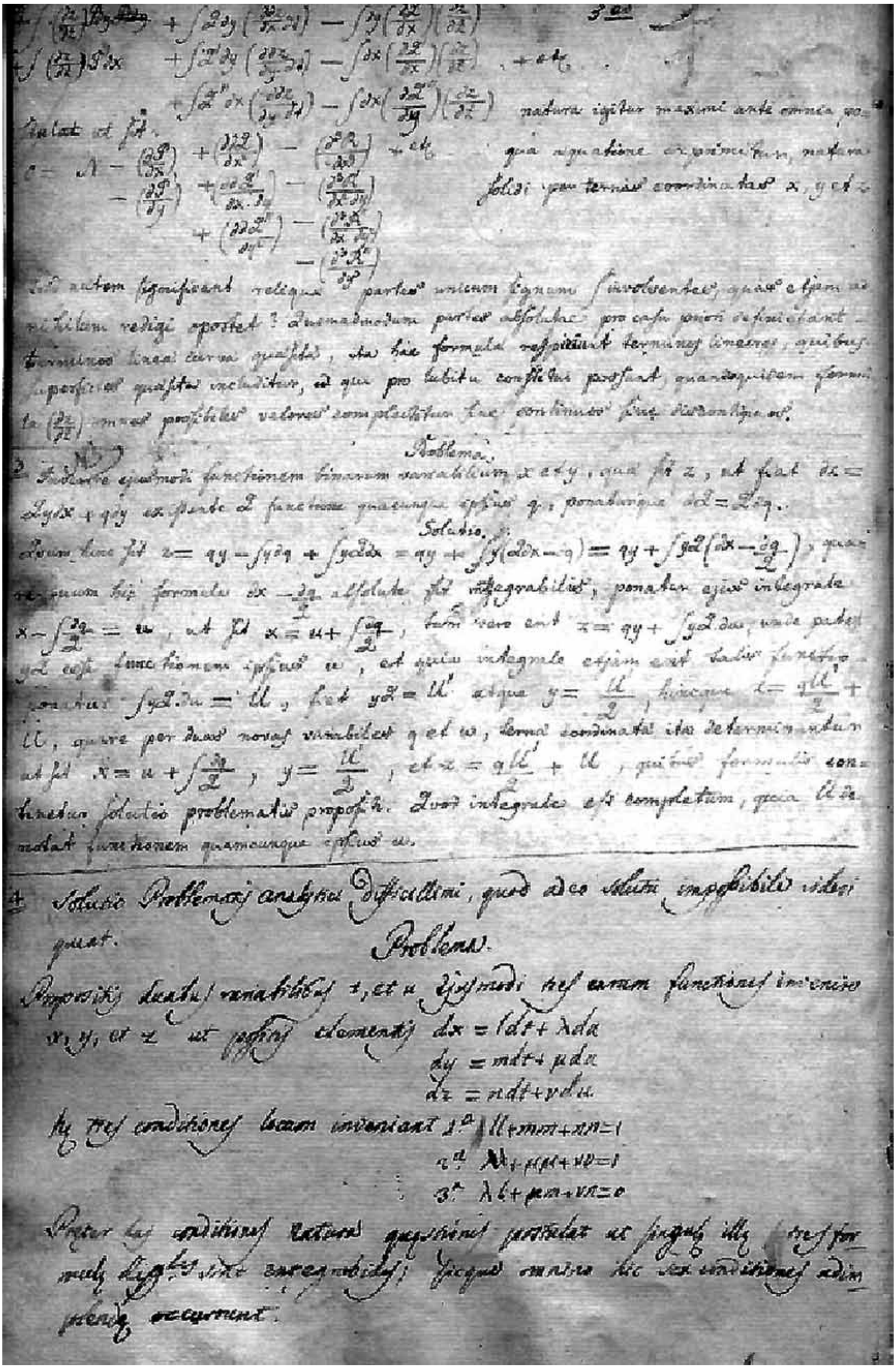
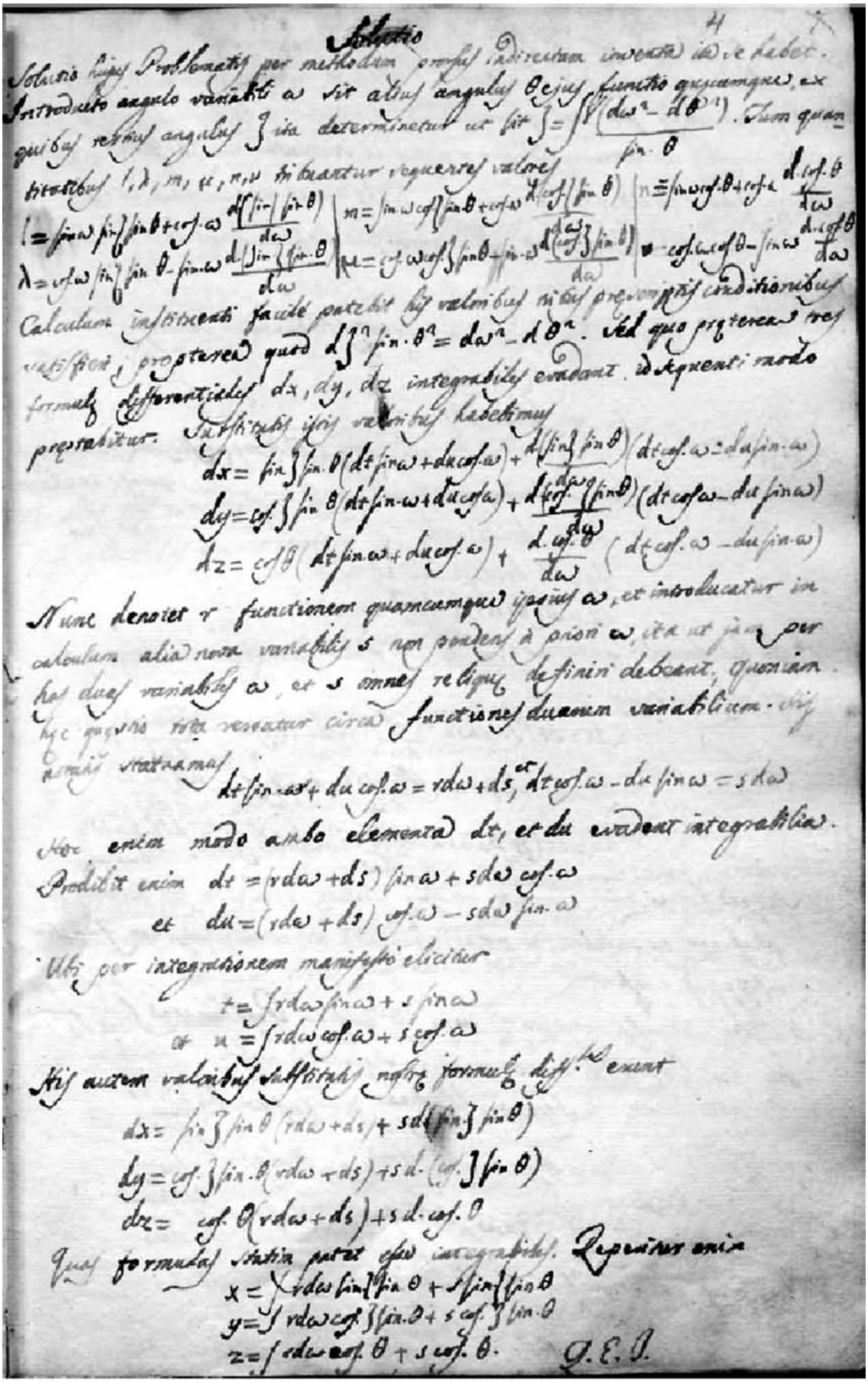


Рис. 4. Страница из записной книжки Л. Эйлера. Ф. 136. Оп. 1. № 138. Л. 3 об.

Электронный научный журнал (Online). ISSN 2303-9922. http://www.vestospu.ru



4

Solutio

Solutio hujus Problematis per methodum prorsus indirectam inventa ita se habet. Introducto angulo variabili $\omega$ sit alius angulus $\theta$ ejus functio quaecunque, ex quibus tertius angulus $\zeta$ ita determinetur ut sit $\zeta = \int \frac{\sqrt{(d\omega^2 - d\theta^2)}}{\sin.\theta}$. Tum quantitatibus $l, \lambda, m, \mu, n, \nu$ tribuantur sequentes valores

$l = \sin\omega \sin\zeta \sin\theta + \cos.\omega \frac{d(\sin\zeta \sin\theta)}{d\omega}$ | $m = \sin\omega \cos\zeta \sin\theta + \cos\omega \frac{d(\cos\zeta \sin\theta)}{d\omega}$ | $n = \sin\omega \cos\theta + \cos\omega \frac{d\cos\theta}{d\omega}$

$\lambda = \cos\omega \sin\zeta \sin\theta - \sin\omega \frac{d(\sin\zeta \sin.\theta)}{d\omega}$ | $\mu = \cos\omega \cos\zeta \sin\theta - \sin\omega \frac{d(\cos\zeta \sin\theta)}{d\omega}$ | $\nu = \cos\omega \cos\theta - \sin\omega \frac{d\cos\theta}{d\omega}$

Calculum instituenti facile patebit his valoribus tribus praecedentibus conditionibus satisfieri, propterea quod $d\zeta^2 \sin.\theta^2 = d\omega^2 - d\theta^2$. Sed quo praeterea tres formulae differentiales $dx, dy, dz$ integrabiles evadant, sequenti modo praestabitur. Substitutis ipsis valoribus habebimus

$$dx = \sin\zeta \sin.\theta(dt \sin\omega + du \cos.\omega) + \frac{d(\sin\zeta \sin\theta)}{d\omega}(dt \cos.\omega - du \sin.\omega)$$

$$dy = \cos.\zeta \sin\theta(dt \sin.\omega + du \cos\omega) + \frac{d(\cos.\zeta \sin\theta)}{d\omega}(dt \cos\omega - du \sin\omega)$$

$$dz = \cos\theta(dt \sin\omega + du \cos.\omega) + \frac{d.\cos.\theta}{d\omega}(dt \cos.\omega - du \sin.\omega)$$

Nunc denotet $r$ functionem quamcunque ipsius $\omega$, et introducatur in calculum alia nova variabilis $s$ non pendens a priori $\omega$, ita ut jam per has duas variabiles $\omega$, et $s$ omnes reliquae definiri debeant, quoniam hic quaestio tota versatur circa functiones duarum variabilium. Statuamus

$$dt \sin.\omega + du \cos.\omega = r d\omega + ds, \text{ et } dt \cos.\omega - du \sin\omega = s d\omega$$

Hoc enim modo ambo elementa $dt$, et $du$ evadent integrabilia.

Prodibit enim $dt = (r d\omega + ds) \sin\omega + s d\omega \cos.\omega$

et $du = (r d\omega + ds) \cos.\omega - s d\omega \sin.\omega$

Ubi per integrationem manifesto elicitur

$$t = \int r d\omega \sin\omega + s \sin\omega$$

et $u = \int r d\omega \cos.\omega + s \cos.\omega$

His autem valoribus substitutis nostrae formulae diff.les erunt

$$dx = \sin\zeta \sin\theta(r d\omega + ds) + s d(\sin\zeta \sin\theta)$$

$$dy = \cos.\zeta \sin.\theta(r d\omega + ds) + s d.(\cos.\zeta \sin\theta)$$

$$dz = \cos.\theta(r d\omega + ds) + s d.\cos.\theta$$

Quas formulas statim patet esse integrabiles. Reperitur enim

$$x = \int r d\omega \sin\zeta \sin\theta + s \sin\zeta \sin\theta$$

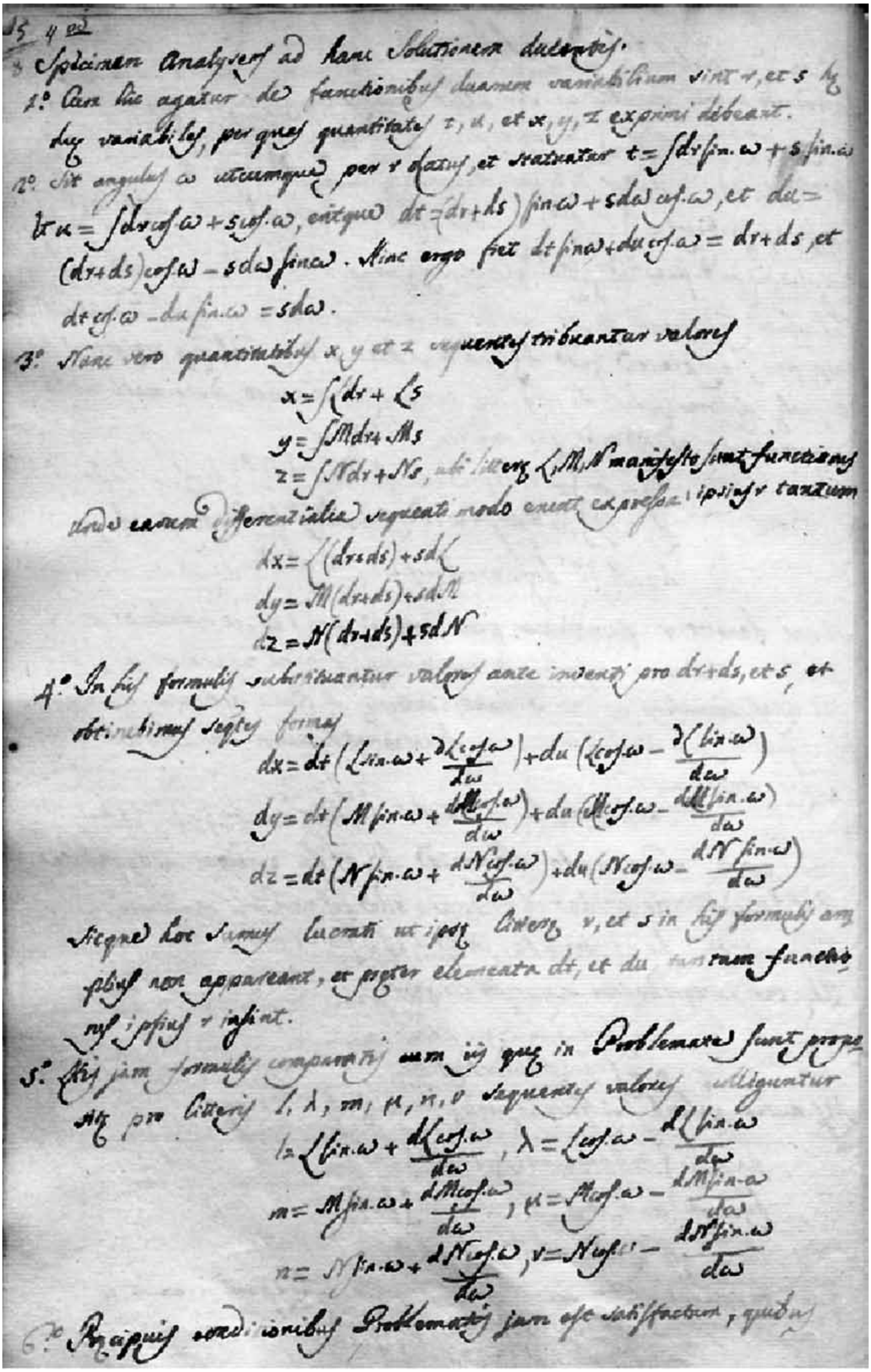
$$y = \int r d\omega \cos.\zeta \sin.\theta + s \cos.\zeta \sin.\theta$$

$$z = \int r d\omega \cos.\theta + s \cos.\theta.$$

Q.E.I.

Рис. 5. Страница из записной книжки Л. Эйлера. Ф. 136. Оп. 1. № 138. Л. 4

Электронный научный журнал (Online). ISSN 2303-9922. http://www.vestospu.ru



Specimen Analyseos ad hanc Solutionem ducentis.

1°. Cum hic agatur de functionibus duarum variabilium sint r, et s hae duae variabiles, per quas quantitates t, u, et x, y, z exprimi debeant.

2°. Sit angulus ω utcumque per r datus, et statuatur $t = \int dr \sin.\omega + s \sin.\omega$ et $u = \int dr \cos.\omega + s \cos.\omega$, eritque $dt = (dr+ds)\sin\omega + s\,d\omega \cos.\omega$, et $du = (dr+ds)\cos\omega - s\,d\omega \sin\omega$. Hinc ergo fiet $dt \sin\omega + du \cos.\omega = dr+ds$, et $dt \cos.\omega - du \sin.\omega = s\,d\omega$.

3°. Nunc vero quantitatibus x, y et z sequentes tribuantur valores

$$x = \int L\,dr + Ls$$
$$y = \int M\,dr + Ms$$
$$z = \int N\,dr + Ns,$$

ubi litterae L, M, N manifesto sunt functiones ipsius r tantum; unde earum differentialia sequenti modo erunt expressa

$$dx = L(dr+ds) + s\,dL$$
$$dy = M(dr+ds) + s\,dM$$
$$dz = N(dr+ds) + s\,dN$$

4°. In his formulis substituantur valores ante inventi pro dr+ds, et s, et obtinebimus sequentes formas

$$dx = dt\left(L \sin.\omega + \frac{dL\cos.\omega}{d\omega}\right) + du\left(L\cos.\omega - \frac{dL\sin.\omega}{d\omega}\right)$$
$$dy = dt\left(M \sin.\omega + \frac{dM\cos.\omega}{d\omega}\right) + du\left(M\cos.\omega - \frac{dM\sin.\omega}{d\omega}\right)$$
$$dz = dt\left(N \sin.\omega + \frac{dN\cos.\omega}{d\omega}\right) + du\left(N\cos.\omega - \frac{dN\sin.\omega}{d\omega}\right)$$

Atque hoc sumus lucrati ut ipsae litterae r, et s in his formulis amplius non appareant, et praeter elementa dt, et du tantum functiones ipsius r insint.

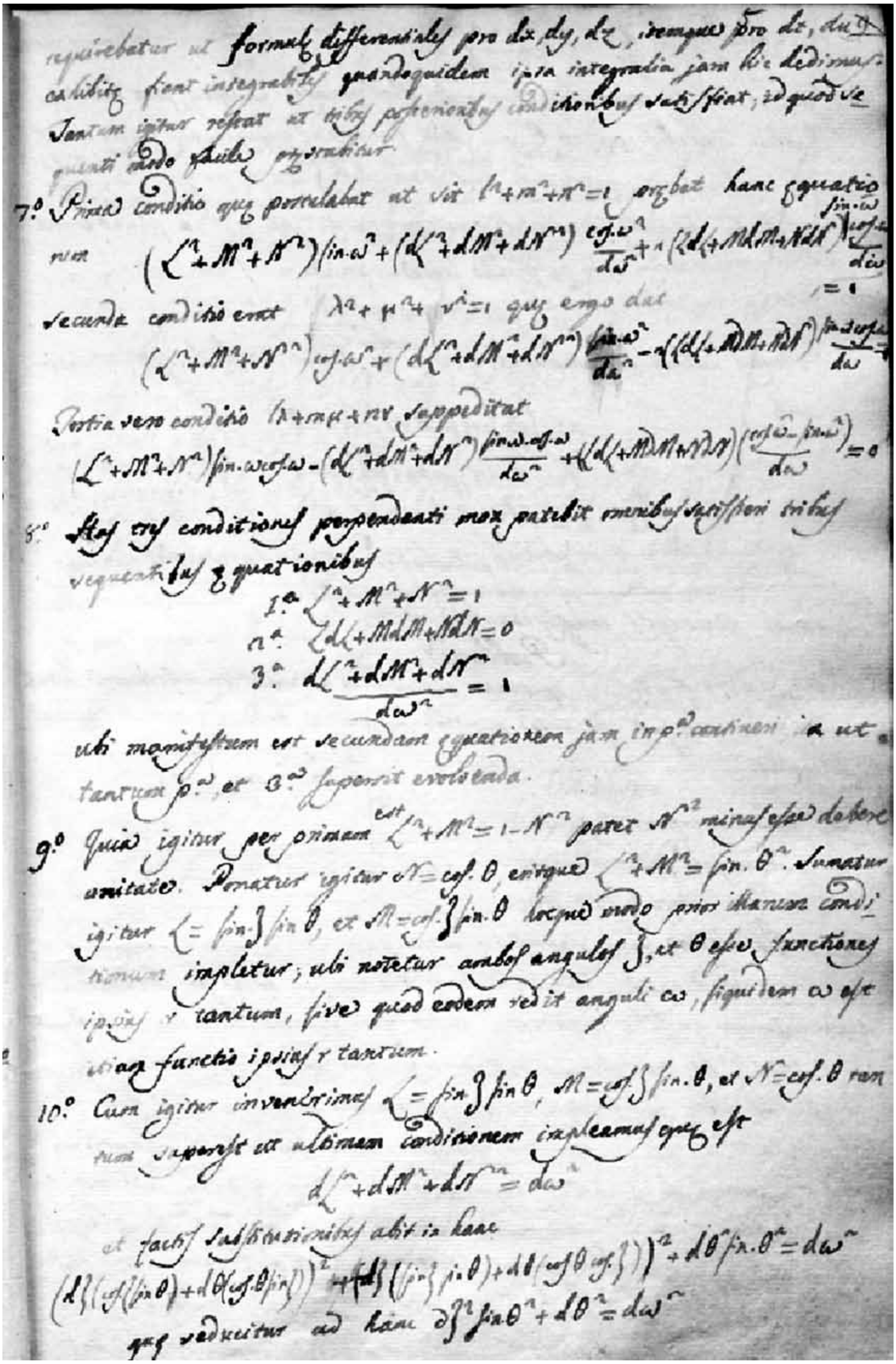
5°. His jam formulis comparatis cum iis quae in Problemate sunt propositae pro litteris l, λ, m, μ, n, ν sequentes valores colliguntur

$$l = L\sin.\omega + \frac{dL\cos.\omega}{d\omega},\quad \lambda = L\cos.\omega - \frac{dL\sin.\omega}{d\omega}$$
$$m = M\sin.\omega + \frac{dM\cos.\omega}{d\omega},\quad \mu = M\cos.\omega - \frac{dM\sin.\omega}{d\omega}$$
$$n = N\sin.\omega + \frac{dN\cos.\omega}{d\omega},\quad \nu = N\cos.\omega - \frac{dN\sin.\omega}{d\omega}$$

6°. Respiciamus conditionibus Problematis jam esse satisfactum, quibus

Рис. 6. Страница из записной книжки Л. Эйлера. Ф. 136. Оп. 1. № 138. Л. 4 об.

Электронный научный журнал (Online). ISSN 2303-9922. http://www.vestospu.ru



requirebatur ut formulae differentiales pro $dx, dy, dz$, itemque pro $d\lambda, d\mu$ ... calibus fiant integrabiles quandoquidem ipsa integralia jam hic dedimus. Tantum igitur restat ut tribus posterioribus conditionibus satisfiat, id quod sequenti modo facile praestabitur

7° Prima conditio quae postulabat ut sit $l^2+m^2+n^2=1$ praebet hanc aequationem

$$(L^2+M^2+N^2)\sin.\omega^2+(dL^2+dM^2+dN^2)\frac{\cos.\omega^2}{d\omega^2}+2(LdL+MdM+NdN)\frac{\sin.\omega\cos.\omega}{d\omega}=1$$

secunda conditio erat $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$ quae ergo dat

$$(L^2+M^2+N^2)\cos.\omega^2+(dL^2+dM^2+dN^2)\frac{\sin.\omega^2}{d\omega^2}-2(LdL+MdM+NdN)\frac{\sin.\omega\cos.\omega}{d\omega}=1$$

Tertia vero conditio $l\lambda+m\mu+n\nu$ suppeditat

$$(L^2+M^2+N^2)\sin.\omega\cos.\omega-(dL^2+dM^2+dN^2)\frac{\sin.\omega\cos.\omega}{d\omega^2}+(LdL+MdM+NdN)\left(\frac{\cos.\omega^2-\sin.\omega^2}{d\omega}\right)=0$$

8° Has tres conditiones perpendenti mox patebit omnibus satisfieri tribus sequentibus aequationibus

1° $L^2+M^2+N^2=1$

2° $LdL+MdM+NdN=0$

3° $\dfrac{dL^2+dM^2+dN^2}{d\omega^2}=1$

ubi manifestum est secundam aequationem jam in 1ª contineri ita ut tantum 1ª et 3ª superint evolvenda.

9° Quia igitur per primam est $L^2+M^2=1-N^2$ patet $N^2$ minus esse debere unitate. Ponatur igitur $N=\cos.\theta$, eritque $L^2+M^2=\sin.\theta^2$. Sumatur igitur $L=\sin.\zeta\sin.\theta$, et $M=\cos.\zeta\sin.\theta$ hocque modo prior illarum conditionum impletur, ubi notetur ambos angulos $\zeta$, et $\theta$ esse functiones ipsius $r$ tantum, sive quod eodem redit anguli $\omega$, siquidem $\omega$ esse etiam functio ipsius $r$ tantum.

10° Cum igitur invenerimus $L=\sin.\zeta\sin.\theta$, $M=\cos.\zeta\sin.\theta$, et $N=\cos.\theta$ tantum superest ut ultimam conditionem impleamus quae est

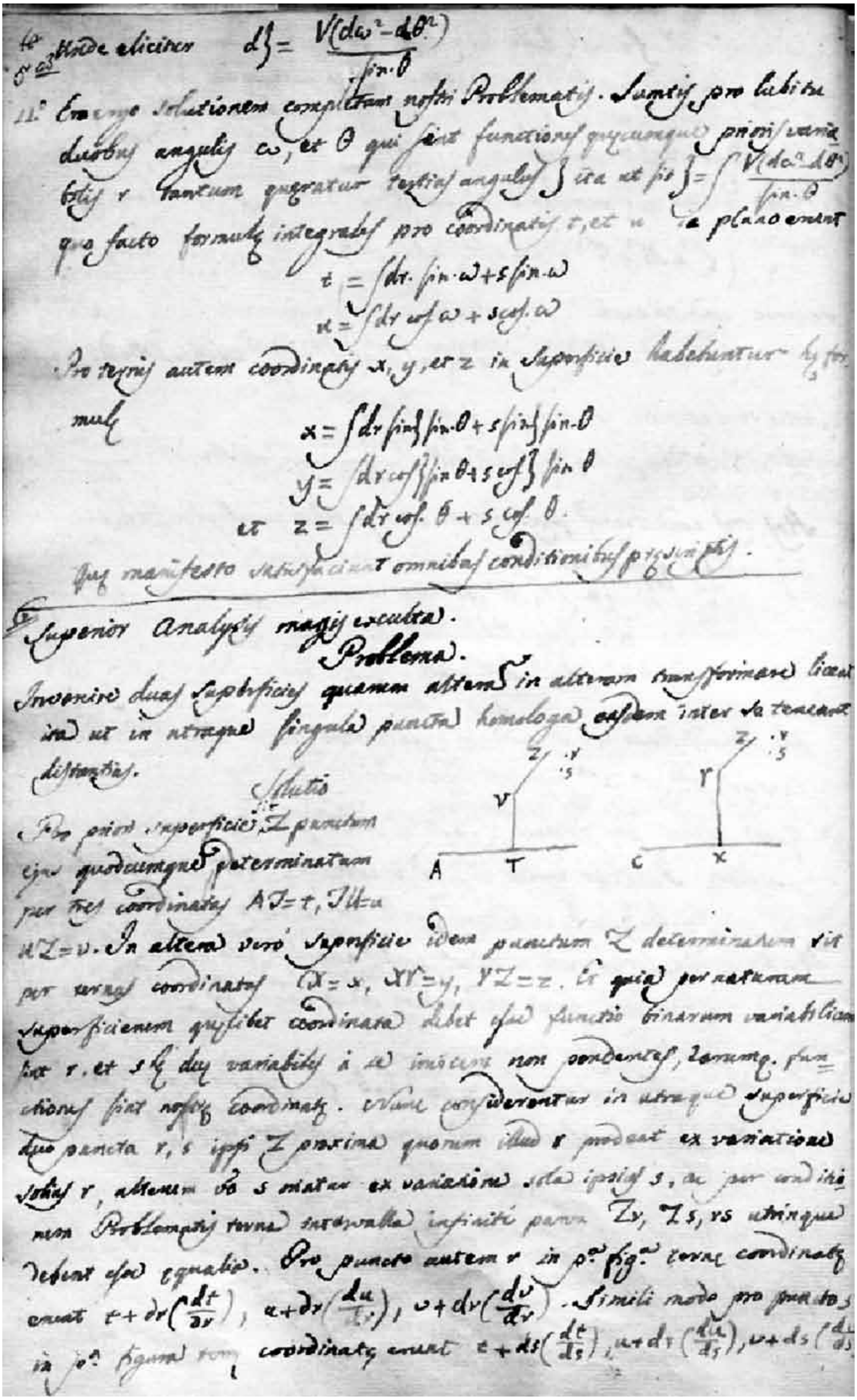
$$dL^2+dM^2+dN^2=d\omega^2$$

et factis substitutionibus abit in hanc

$$(d\zeta(\cos\zeta\sin\theta)+d\theta(\cos\theta\sin\zeta))^2+(d\zeta(\sin\zeta\sin\theta)+d\theta(\cos\theta\cos\zeta))^2+d\theta^2\sin.\theta^2=d\omega^2$$

quae reducitur ad hanc $d\zeta^2\sin.\theta^2+d\theta^2=d\omega^2$

Рис. 7. Страница из записной книжки Л. Эйлера. Ф. 136. Оп. 1. № 138. Л. 5.



Unde eliciter $d\zeta = \frac{\sqrt{(d\omega^2 - d\theta^2)}}{\sin\theta}$

II° Ex eoque solutionem completam nostri Problematis. Sumtis pro lubitu duobus angulis $\omega$, et $\theta$ qui sint functiones quaecunque primis variabilis $r$ tantum quaeratur tertius angulus $\zeta$ ita ut sit $\zeta = \int \frac{\sqrt{(d\omega^2 - d\theta^2)}}{\sin\theta}$ quo facto formulis integralis pro coordinatis $t$, et $u$ in plano erunt

$$t = \int dr \cdot \sin\omega + s \sin\omega$$

$$u = \int dr \cos\omega + s \cos\omega$$

Pro ternis autem coordinatis $x$, $y$, et $z$ in superficie habebuntur hae formulae

$$x = \int dr \sin\zeta \sin\theta + s \sin\zeta \sin\theta$$

$$y = \int dr \cos\zeta \sin\theta + s \cos\zeta \sin\theta$$

$$\text{et} \quad z = \int dr \cos\theta + s \cos\theta.$$

Quae manifesto satisfaciunt omnibus conditionibus praescriptis.

Superior analysis magis exculta.

Problema.

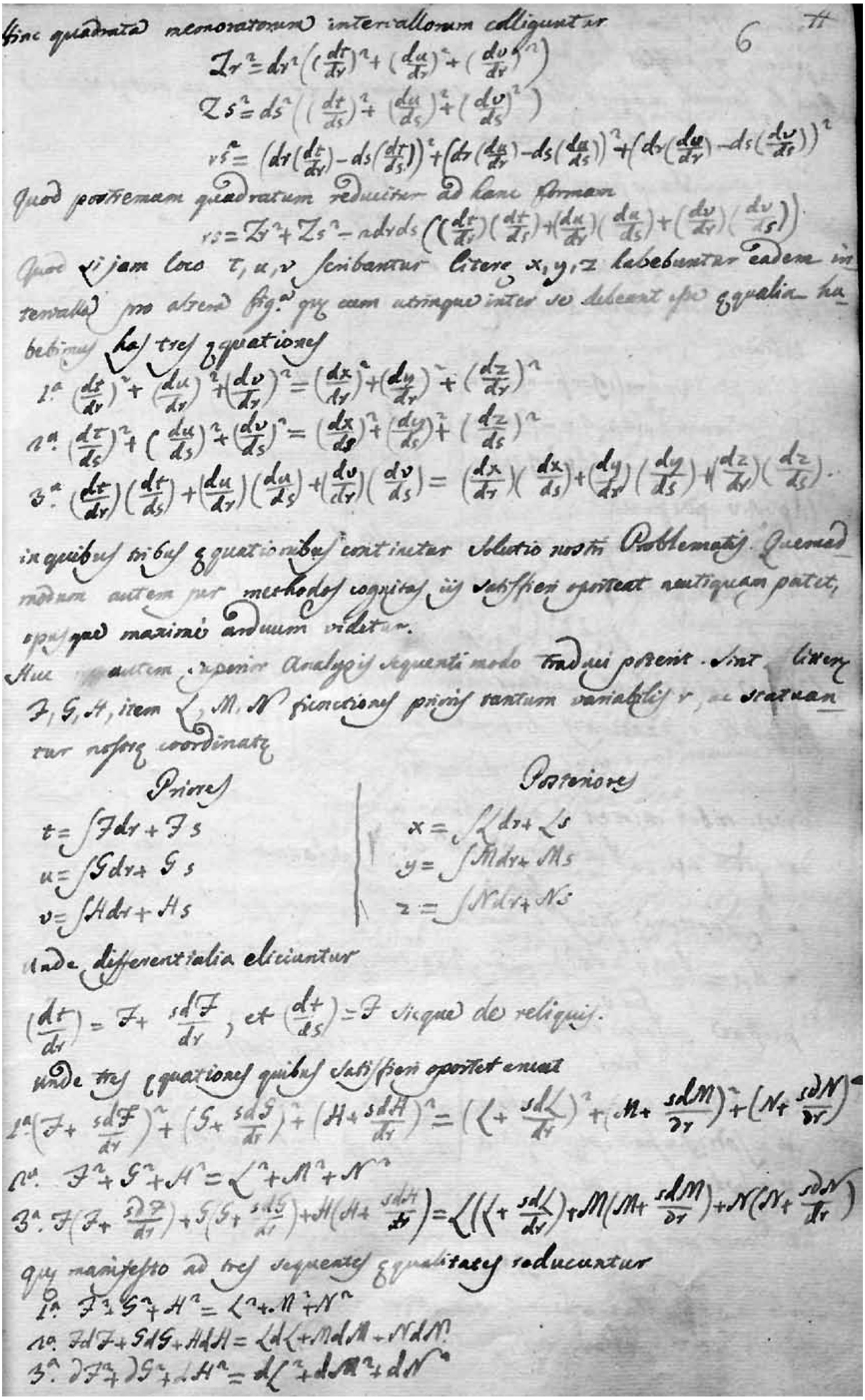
Invenire duas superficies quarum alteram in alteram transformare liceat ita ut in utraque singula puncta homologa easdem inter se teneant distantias.

Solutio

Pro priori superficie Z punctum ejus quodcunque determinatum per tres coordinatas $AT = t$, $TV = u$, $VZ = v$. In altera vero superficie idem punctum Z determinatum sit per ternas coordinatas $CX = x$, $XY = y$, $YZ = z$. Et quia per naturam superficierum quaelibet coordinata debet esse functio binarum variabilium sint $r$. et $s$ hae duae variabiles a se invicem non pendentes, earumque functiones sint nostrae coordinatae. Nunc considerentur in utraque superficie duo puncta $r$, $s$ ipsi Z proxima quorum illud $r$ prodeat ex variatione solius $r$, alterum vero $s$ natum ex variatione sola ipsius $s$, ac per conditionem Problematis terna intervalla infinite parva $Zr$, $Zs$, $rs$ utrinque debent esse aequalia. Pro puncto autem $r$ in p$^a$ fig$^a$ ternae coordinatae erunt $t + dr\left(\frac{dt}{dr}\right)$, $u + dr\left(\frac{du}{dr}\right)$, $v + dr\left(\frac{dv}{dr}\right)$. Simili modo pro puncto $s$ in p$^a$ figura ternae coordinatae erunt $t + ds\left(\frac{dt}{ds}\right)$, $u + ds\left(\frac{du}{ds}\right)$, $v + ds\left(\frac{dv}{ds}\right)$

Рис. 8. Страница из записной книжки Л. Эйлера. Ф. 136. Оп. 1. № 138. Л. 5 об.

Электронный научный журнал (Online). ISSN 2303-9922. http://www.vestospu.ru



Hinc quadrata memoratorum intervallorum colliguntur 6

$$\mathfrak{Z}r^2 = dr^2\left(\left(\frac{dt}{dr}\right)^2+\left(\frac{du}{dr}\right)^2+\left(\frac{dv}{dr}\right)^2\right)$$

$$\mathfrak{Z}s^2 = ds^2\left(\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right)$$

$$rs^2 = \left(dr\left(\frac{dt}{dr}\right)-ds\left(\frac{dt}{ds}\right)\right)^2+\left(dr\left(\frac{du}{dr}\right)-ds\left(\frac{du}{ds}\right)\right)^2+\left(dr\left(\frac{dv}{dr}\right)-ds\left(\frac{dv}{ds}\right)\right)^2$$

Quod postremum quadratum reducitur ad hanc formam

$$rs = \mathfrak{Z}r^2+\mathfrak{Z}s^2-2drds\left(\left(\frac{dt}{dr}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)+\left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{du}{ds}\right)+\left(\frac{dv}{dr}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)\right)$$

Quod si jam loco $t, u, v$ scribantur literae $x, y, z$ habebuntur eadem intervalla pro altera fig.ra quae cum utrinque inter se debeant esse aequalia habebimus has tres aequationes

$$1^a.\ \left(\frac{dt}{dr}\right)^2+\left(\frac{du}{dr}\right)^2+\left(\frac{dv}{dr}\right)^2=\left(\frac{dx}{dr}\right)^2+\left(\frac{dy}{dr}\right)^2+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2$$

$$2^a.\ \left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2$$

$$3^a.\ \left(\frac{dt}{dr}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)+\left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{du}{ds}\right)+\left(\frac{dv}{dr}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)=\left(\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)+\left(\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)+\left(\frac{dz}{dr}\right)\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

in quibus tribus aequationibus continetur solutio nostri Problematis. Quemadmodum autem per methodos cognitas iis satisfieri oporteat neutiquam patet, [illegible] quod maxime arduum videtur.

Hoc autem [illegible] Analysis sequenti modo tradi potest. Sint literae $F, G, H$, item $L, M, N$ functiones prioris tantum variabilis $r$, ac statuantur nostrae coordinatae

| Priores | Posteriores |
|---|---|
| $t=\int F dr + F s$ | $x=\int L dr + L s$ |
| $u=\int G dr + G s$ | $y=\int M dr + M s$ |
| $v=\int H dr + H s$ | $z=\int N dr + N s$ |

Unde differentialia eliciuntur

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)=F+\frac{sdF}{dr},\ \text{et}\ \left(\frac{dt}{ds}\right)=F \text{ sicque de reliquis.}$$

unde tres aequationes quibus satisfieri oportet erunt

$$1^a\ \left(F+\frac{sdF}{dr}\right)^2+\left(G+\frac{sdG}{dr}\right)^2+\left(H+\frac{sdH}{dr}\right)^2=\left(L+\frac{sdL}{dr}\right)^2+\left(M+\frac{sdM}{dr}\right)^2+\left(N+\frac{sdN}{dr}\right)^2$$

$$2^a.\ F^2+G^2+H^2=L^2+M^2+N^2$$

$$3^a.\ F\left(F+\frac{sdF}{dr}\right)+G\left(G+\frac{sdG}{dr}\right)+H\left(H+\frac{sdH}{dr}\right)=L\left(L+\frac{sdL}{dr}\right)+M\left(M+\frac{sdM}{dr}\right)+N\left(N+\frac{sdN}{dr}\right)$$

quae manifesto ad tres sequentes aequalitates reducuntur

$$1^a.\ F^2+G^2+H^2=L^2+M^2+N^2$$

$$2^a.\ FdF+GdG+HdH=LdL+MdM+NdN$$

$$3^a.\ dF^2+dG^2+dH^2=dL^2+dM^2+dN^2$$

Рис. 9. Страница из записной книжки Л. Эйлера. Ф. 136. Оп. 1. № 138. Л. 6.



07.00.00 ИСТОРИЧЕСКИЕ НАУКИ

Электронный научный журнал (Online). ISSN 2303-9922. http://www.vestospu.ru



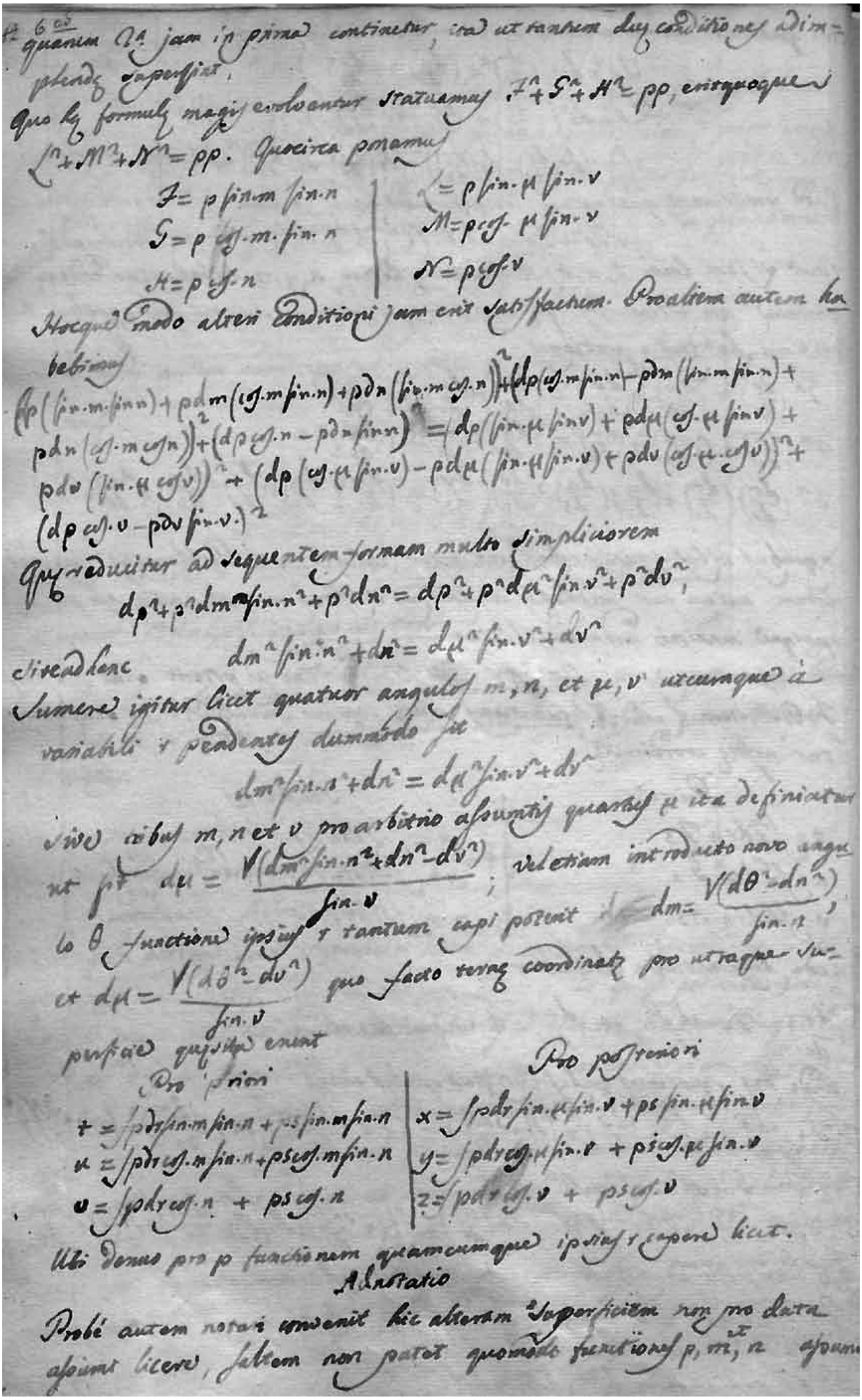


Рис. 10. Страница из записной книжки Л. Эйлера. Ф. 136. Оп. 1. № 138. Л. 6 об.

Электронный научный журнал (Online). ISSN 2303-9922. http://www.vestospu.ru

Если этим переменным дать бесконечно малые приращения $dr$ и $ds$, то на поверхности $\tau$ получим две точки

$$B\left(t+dr\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right);u+dr\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right);v+dr\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)\right) \text{ и } C\left(t+ds\left(\frac{\partial t}{\partial s}\right);u+ds\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right);v+ds\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)\right),$$

а на поверхности $\tau'$ соответственно точки $B'\left(x+dr\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right);y+dr\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right);z+dr\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\right)$ и $C'\left(x+ds\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right);y+ds\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right);z+ds\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\right)$.

Точки $A$ и $B$ располагаются очень близко, поскольку приращение $dr$ бесконечно мало. Поэтому длину дуги $AB$ можно считать равной длине отрезка $AB$. При этом замечаем, что $AB^2 = dr^2\left(\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2\right)$.

Аналогично получаем, что длина дуги $AC$ равна длине отрезка $AC$, причем $AC^2 = ds^2\left(\left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2\right)$.

Длина дуги $BC$ тоже равна длине отрезка $BC$, для которого справедливо:

$$BC^2 = \left(dr\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)-ds\left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)\right)^2+\left(dr\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)-ds\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right)^2+\left(dr\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)-ds\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)\right)^2 =$$

$$= AB^2+AC^2-2drds\left(\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)\right).$$

Схожие соотношения имеем и для точек $A'$, $B'$, $C'$ поверхности $\tau'$:

$$A'B'^2 = dr^2\left(\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\right);$$

$$A'C'^2 = ds^2\left(\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right);$$

$$B'C'^2 = A'B'^2+A'C'^2-2drds\left(\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\right).$$

Далее, поскольку при изгибании сохраняются длины соответствующих дуг, то $AB^2 = A'B'^2$, $AC^2 = A'C'^2$, $BC^2 = B'C'^2$, откуда следует система из трех равенств:

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2,\\ \left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2,\\ \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right),\end{cases} \tag{3}$$

определяющая условия изгибания одной поверхности в другую.

В современной терминологии эта система выражает условие равенства соответствующих коэффициентов первых квадратичных форм Гаусса для линейных элементов поверхностей:

$$\begin{cases} E = E', \\ G = G', \\ F = F'. \end{cases}$$

К сожалению, этот замечательный результат Эйлера оставался неизвестным почти сто лет. Он был опубликован М. Е. Головиным лишь в 1862 году в первом томе L. Euleri Opera posthuma в разделе «Continuatio Fragmentorum ex Adversariis mathematicis depromtorum» [14, с. 494—496].

Решение полученной системы (3) Эйлер предложил искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} t &= \int Jdr + Js \,, \quad x = \int Ldr + Ls \,, \\ u &= \int Gdr + Gs \,, \quad y = \int Mdr + Ms \,, \\ v &= \int Hdr + Hs \,, \quad z = \int Ndr + Ns \,, \end{aligned} \tag{4}$$

где функции $J$, $G$, $H$ и $L$, $M$, $N$ зависят лишь от переменной $r$.

В комментариях [9, vol. 29, c. XLI] к этой работе А. Шпайзер отметил, что если здесь положить $s = 0$, то на каждой из рассматриваемых поверхностей мы получим пространственную кривую, зависящую только от параметра $r$. Причем $(J, G, H)$ являются координатами вектора касательной, проведенной в точке $(t, u, v)$ к кривой, лежащей на первой поверхности; $(L, M, N)$ — координаты вектора касательной, проведенной в точке $(x, y, z)$ к кривой, лежащей на второй поверхности.

Подставив выражения (4) в уравнения системы (3), Эйлер после некоторых преобразований пришел к системе вида:

$$\begin{cases} J^2 + G^2 + H^2 = L^2 + M^2 + N^2, \\ JdJ + GdG + HdH = LdL + MdM + NdN, \\ (dJ)^2 + (dG)^2 + (dH)^2 = (dL)^2 + (dM)^2 + (dN)^2. \end{cases} \tag{5}$$

Далее, положив $J^2 + G^2 + H^2 = L^2 + M^2 + N^2 = p^2$, Эйлер представил функции $J$, $G$, $H$ и $L$, $M$, $N$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} &J = p \sin m \sin n \,, \; G = p \cos m \sin n \,, \; H = p \cos n \,, \\ &L = p \sin \mu \sin \nu \,, \; M = p \cos \mu \sin \nu \,, \; N = p \cos \nu \,. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь величина $p$ выражает длину каждого из векторов $(J, G, H)$ и $(L, M, N)$; $n$ следует понимать как угол отклонения вектора $(J, G, H)$ от оси $v$; $m$ — угол отклонения от оси $u$ проекции вектора $(J, G, H)$ на плоскость $(t, u)$; $\nu$ — угол отклонения вектора $(L, M, N)$ от оси $z$; $\mu$ — угол отклонения от оси $y$ проекции вектора $(L, M, N)$ на плоскость $(x, y)$.

При этом $p$, а также углы $m$, $n$, $\mu$ и $\nu$ зависят лишь от параметра $r$. Другими словами, здесь Эйлер использовал так называемые сферические координаты.

Подставив выражения (6) в последнее равенство системы (5), он вывел соотношение: $dm^2 \sin^2 n + dn^2 = d\mu^2 \sin^2 \nu + d\nu^2$, которое показывает, что всегда один из четырех углов $m$, $n$, $\mu$ и $\nu$ можно выразить через три остальных.

Таким образом, координаты соответствующих точек $(t, u, v)$ и $(x, y, z)$ изгибаемых друг на друга поверхностей выражены следующими равенствами:

$$\begin{aligned} t &= \int p \sin m \sin n dr + ps \sin m \sin n \,, \quad x = \int p \sin \mu \sin \nu dr + ps \sin \mu \sin \nu \,, \\ u &= \int p \cos m \sin n dr + ps \cos m \sin n \,, \quad y = \int p \cos \mu \sin \nu dr + ps \cos \mu \sin \nu \,, \\ v &= \int p \cos n dr + ps \cos n \,, \quad v = \int p \cos \nu dr + ps \cos \nu \,. \end{aligned}$$

В послесловии Эйлер сделал важное замечание: сфера является поверхностью, которая не может изгибаться, поскольку она замкнутая [и выпуклая]; если же взять часть сферы, то она допускает изгибание.

Полученные результаты он применил в работах по картографии: «Об изображении поверхности шара на плоскости» (1777) [15], «О географической проекции поверхности шара» (1777) [16], «О географической проекции Делиля, примененной на генеральной карте Российской Империи» (1777) [17].

Работы Эйлера по дифференциальной геометрии поверхностей оказали влияние на Гаспара Монжа (1746—1818) и Карла Фридриха Гаусса (1777—1855) и явились основой для их дальнейших исследований в этом направлении.

**Список использованной литературы**

1. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / пер. с нем. и ред. А. П. Юшкевича. М. : Наука, 1966. 507 с.

2. Выгодский М. Я. Возникновение дифференциальной геометрии // Гаспар Монж. Приложение анализа к геометрии / пер. с фр. В. А. Гуковской. М. ; Л. : ОНТИ, 1936. С. 1—70.

3. Делоне Б. Н. Эйлер как геометр // Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии наук СССР / под ред. М. А. Лаврентьева, А. П. Юшкевича, А. Т. Григорьяна. М. : Академия наук СССР, 1958. С. 133—181.

4. Котек В. В. Геометрия // История отечественной математики с древнейших времен до конца XVIII в. Киев : Наукова думка, 1968. Т. I, гл. VIII. Труды Леонарда Эйлера в области дифференциальных уравнений в частных производных, вариационного исчисления, геометрии, теории вероятностей и теории чисел / под ред. И. З. Штокало. С. 277—284.

5. Kommerell V. Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes // Cantor M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig, 1908. Bd. IV. S. 453—576.

6. Розенфельд Б. А., при участии А. П. Юшкевича. Геометрия // История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Математика XVIII столетия / под ред. А. П. Юшкевича. М. : Наука, 1972. Т. III. С. 153—221.

7. Розенфельд Б. А. Геометрические преобразования в работах Леонарда Эйлера // Историко-математические исследования. М., 1957. Вып. 10. С. 371—424.

8. Стройк Д. Я. Очерк истории дифференциальной геометрии (до XX столетия) / пер. с англ. М. Г. Шестопал ; под ред. Э. Кольмана. М. ; Л. : ОГИЗ, 1941. 80 с.

9. Speiser A. Übersicht über die im Bande 27, 28, 29 der ersten Serie enthaltenen abhandlungen // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / ed. A. Speiser. Turici (Zurich), 1954. Vol. 27. S. VII—XLI; 1955. Vol. 28. S. VII—XLIV; 1956. Vol. 29. S. VII—XLII.

10. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года. М. : Наука, 1968.

11. Эйлер Л. Переписка. Аннотированный указатель / ред. В. И. Смирнов, А. П. Юшкевич. Л., 1967.

12. Санкт-Петербургский филиал Архива РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 131—133, 137, 138.

13. Euler L. De solidis quorum superficiem in planum explicare licet [1772] // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / ed. A. Speiser. Turici (Zurich), 1955. Vol. 28. S. 161—186.

14. Euler L. Continuatio Fragmentorum ex Adversariis mathematicis depromtorum // L. Euleri Opera posthuma. S.-Petersb., 1862. Vol. I. S. 487—518.

15. Эйлер Л. Об изображении поверхности шара на плоскости // Эйлер Л. Избранные картографические статьи. М., 1959. С. 21—50.

16. Эйлер Л. О географической проекции поверхности шара // Там же. С. 51—64.

17. Эйлер Л. О географической проекции Делиля, примененной на генеральной карте Российской Империи // Там же. С. 65—72.

Поступила в редакцию 25.05.2012 г.

***Игнатушина Инесса Васильевна***, кандидат физико-математических наук, доцент

Оренбургский государственный педагогический университет, кафедра математического анализа и методики преподавания математики.

460844, Российская Федерация, г. Оренбург, ул. Советская, 19.

E-mail: streleec@yandex.ru

**I. V. Ignatushina**

## Application of mathematical analysis to geometry in research of L. Euler: Issue of deformation and development of surfaces

The article presents a research of L. Euler on the problem of surface deformation as well as the particular case of surface development into a plane. It also shows how Euler applied the infinitesimal analysis to resolve one of the typical geometrical issues. The submitted material is an illustration of the formation process of differential geometry in XVIII century.

*Key words:* differential geometry, Leonhard Euler, the theory of surface deformation, history of mathematics.

***Ignatushina Inessa Vasil'evna***, candidate of physico-mathematical sciences, assistant professor

Orenburg State Pedagogical University, Department of Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics.

460844, Russian Federation, Orenburg, ul. Sovetskaya, 19.

E-mail: streleec@yandex.ru