УДК 372.851(091)

И. В. Игнатушина

Вопросы дифференциальной геометрии в курсе лекций А. Н. Коркина

В статье подробно анализируются вопросы дифференциальной геометрии, изложенные в курсе лекций по дифференциальному исчислению известного петербургского математика XIX века А. Н. Коркина.

Ключевые слова: история становления высшего математического образования в России, дифференциальная геометрия, А. Н. Коркин.

Александр Николаевич Коркин (1837—1908), выпускник Петербургского университета 1858 года, больше всего известен своими работами по теории интегрирования уравнений с частными производными и теории чисел [1]. Однако в лекциях по дифференциальному исчислению [2], которые Коркин читал в Петербургском университете и Академическом корпусе Морских наук, достаточно подробно освещались различные вопросы дифференциальной геометрии. Этот курс заслуживает особого внимания, поскольку является одним из первых в России учебных руководств по дифференциальной геометрии, но до сих пор остается малоизвестным.

Изложение вопросов дифференциальной геометрии Коркин начинает с введения понятий касательной к кривой в точке (ξ,η,ζ) и дифференциала дуги кривой, а также вывода соответствующих формул:

$$\frac{dx}{\xi-x}=\frac{dy}{\eta-y}=\frac{dz}{\zeta-z};$$

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2.$$

Далее отмечается, что значения dx, dy и dz пропорциональны косинусам углов α, β и γ, составляемых касательной с осями координат, т.е. $\cos\alpha=kdx$; $\cos\beta=kdy$; $\cos\gamma=kdz$. Возведя обе части каждого из последних равенств в квадрат и сложив их почленно, имеем: $1=k^2ds^2$. Отсюда $k=\pm\frac{1}{ds}$ и, следовательно: $\cos\alpha=\pm\frac{dx}{ds}$; $\cos\beta=\pm\frac{dy}{ds}$; $\cos\gamma=\pm\frac{dz}{ds}$.

Затем вводится понятие нормальной плоскости в точке (ξ,η,ζ) как плоскости, перпендикулярной к касательной, и выводится ее уравнение:

$$(\xi-x)dx+(\eta-y)dy+(\zeta-z)dz=0.$$

В следующем пункте Коркин определяет кривизну кривой как предел отношения угла между двумя касательными, проведенными к кривой в двух бесконечно близких точках, к длине дуги кривой между этими точками (рис. 1).

Отсюда кривизна кривой $y=y(x)$ равна $\frac{d\theta}{ds}$.

Поскольку $tg\theta=y'$, то $\theta=arctgy'$, следовательно, $d\theta=\frac{dy'}{1+y'^2}=\frac{y''dx}{1+y'^2}$.

Тогда для кривизны кривой справедливо:

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{y''dx}{(1+y'^2)ds}=\frac{y''dx}{(1+y'^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

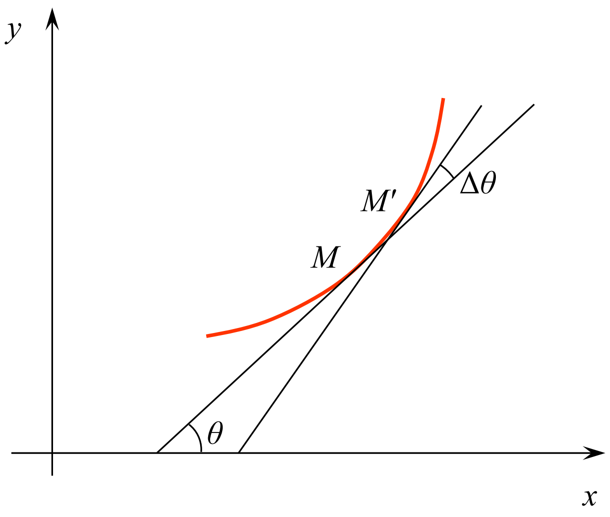

Рис. 1

Радиус кривизны кривой определяется как обратная дробь, т.е.

$$\rho = \frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\left(dx^2+dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

В этом курсе лекций после каждого раздела приведены задачи, которые позволяют на практике применить и закрепить пройденный теоретический материал. Возможно, что часть этих задач Коркин использовал для самостоятельной работы студентов. Так, в рассматриваемом разделе предложены следующие задачи:

1. Доказать, что радиус кривизны циклоиды равен соответствующей удвоенной нормали.

2. Получить выражение радиуса кривизны в полярных координатах.

3. Доказать, что радиус кривизны для логарифмической спирали $r = ae^{n\varphi}$ равен $\rho = r\sqrt{1+n^2}$, т.е. что он пропорционален радиусу-вектору *r*.

Следующий раздел посвящен асимптотам. Асимптоту кривой Коркин определяет как такую прямую, точки которой при бесконечном удалении от начала координат в одном или в обоих направлениях находятся на бесконечно малых расстояниях от данной кривой. Здесь же выводится уравнение касательной к плоской кривой $f(x,y)=0$:

$$y = Ax + B,$$

где $A = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x}$ и $B = \lim\limits_{x\to\infty}(y - Ax)$.

В разделе о соприкасании плоских кривых устанавливается условие соприкасания n-го порядка двух кривых $y = f(x)$ и $y = F(x)$, которое выражается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = F(x), \\ f'(x) = F'(x), \\ f''(x) = F''(x), \\ \dots \\ f^{(n)}(x) = F^{(n)}(x). \end{cases}$$

Затем доказывается, что если порядок касания двух кривых нечетный, то около точки касания одна из кривых оставляет другую по одну свою сторону (рис. 2); напротив, если этот порядок есть число четное, то первая кривая переходит через точку касания с одной стороны второй кривой на другую ее сторону (рис. 3).

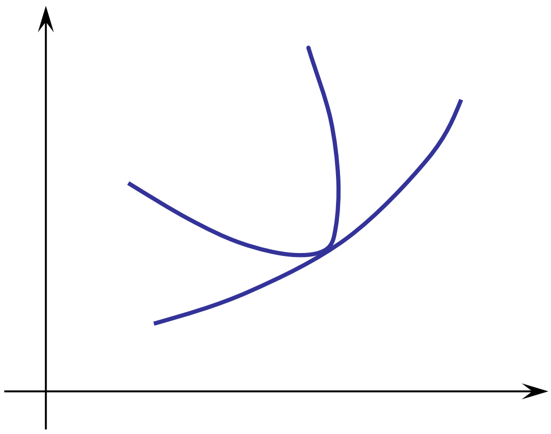

Рис. 2

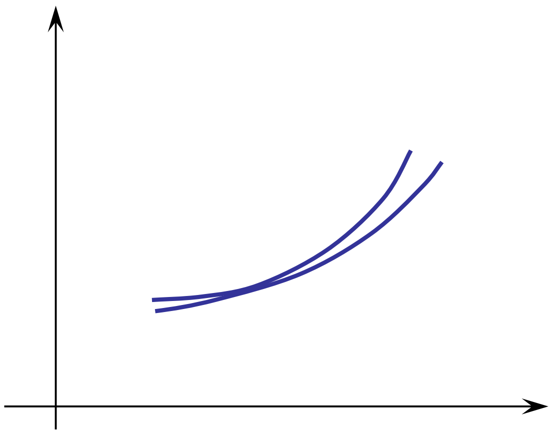

Рис. 3

Опираясь на то, что окружность кривизны с кривой имеет касание 2-го порядка, Коркин предлагает другой способ для выведения формулы для радиуса кривизны кривой.

Пусть окружность кривизны задается уравнением: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$.

Продифференцировав его последовательно два раза, получим:

$$x-\alpha+(y-\beta)y'=0,$$

$$1+y'^2+(y-\beta)y''=0,$$

отсюда: $$y-\beta=-\frac{1+y'^2}{y''} \text{ и } x-\alpha=y'\frac{1+y'^2}{y''}, \quad (*)$$

тогда $$y'^2\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)^2+\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)^2=\rho^2,$$

следовательно, $$\rho=\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

В этом же разделе вводится понятие эволюты как множества центров кривизны данной кривой. Для того чтобы найти ее уравнение, нужно из уравнений (*) исключить x и установить зависимость между α и β. Это предложение иллюстрируется на примерах нахождения эволюты параболы, циклоиды и логарифмической спирали. Самостоятельно предлагается вывести уравнение эволюты эллипса и гиперболы.

Далее доказываются два основных свойства эволюты:

1. Касательная к эволюте в точке (α, β) есть нормаль к данной кривой в точке (x, y).

2. Длина дуги эволюты равна разности радиусов кривизны, соответствующих ее концам.

В разделе об особых точках рассматриваются кратные точки, точки возврата первого и второго рода, точки прекращения, изолированные точки.

Следующий раздел посвящен пространственным кривым. Здесь вводится понятие соприкасающейся плоскости данной кривой как плоскости, проходящей через три бесконечно близкие точки на кривой (x, y, z), $(x + dx, y + dy, z + dz)$, $(x + 2dx + d^2x, y + 2dy + d^2y, z + 2dz + d^2z)$. Опираясь на это определение, выводится уравнение соприкасающейся плоскости пространственной кривой:

$$(\xi - x)(dy \cdot d^2z - dz \cdot d^2y) + (\eta - y)(dz \cdot d^2x - dx \cdot d^2z) + (\zeta - z)(dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x) = 0.$$

Далее отмечается, что соприкасающуюся плоскость можно задать как плоскость, проходящую через касательную в точке $M(t)$ кривой и бесконечно близкую к ней точку $M'(t + \Delta t)$ кривой.

Затем определяются косинусы углов α, β, γ, которые составляет соприкасающаяся плоскость с плоскостями координат:

$$\cos\alpha = \pm\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}; \ \cos\beta = \pm\frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}};$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

где $X = dyd^2z - dzd^2y$, $Y = dzd^2x - dxd^2z$, $Z = dxd^2y - dyd^2x$.

Нормаль, лежащую в соприкасающейся плоскости, Коркин называет главной. Другими словами, главная нормаль является пересечением нормальной и соприкасающейся плоскостей, проведенных в одной и той же точке кривой.

Косинусы углов, составляемых главной нормалью с осями координат, связаны со значением радиуса кривизны кривой следующими соотношениями:

$$\cos\lambda = R\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}, \ \cos\mu = R\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}, \ \cos\nu = R\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}.$$

В этом же разделе вводится понятие кручения кривой как предела отношения угла между двумя соприкасающимися плоскостями, проведенными в бесконечно близких точках $M(t)$ и $M'(t + \Delta t)$ кривой, к длине дуги MM'.

Следующий раздел посвящен поверхностям. Здесь вводится понятие касательной плоскости к поверхности как общее место всех касательных прямых, проведенных через точку поверхности, к различным кривым, проходящим по поверхности через указанную точку.

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ Коркин записывает в следующем виде: $\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0$.

Перпендикуляр к касательной плоскости, проведенный в месте касания с поверхностью, Коркин называет нормалью к поверхности и определяет ее уравнение:

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Далее вводится понятие нормального сечения как сечения поверхности плоскостью, проходящей через нормаль, и доказываются две теоремы.

Первая из них, теорема Менье, гласит: радиус кривизны ρ какой угодно кривой s, проходящей через точку M (рис. 4), есть проекция на главную нормаль MY кривой s радиуса кривизны R нормального сечения σ, имеющего с s общую касательную в точке M, т.е. $\rho = R\cos\theta$.

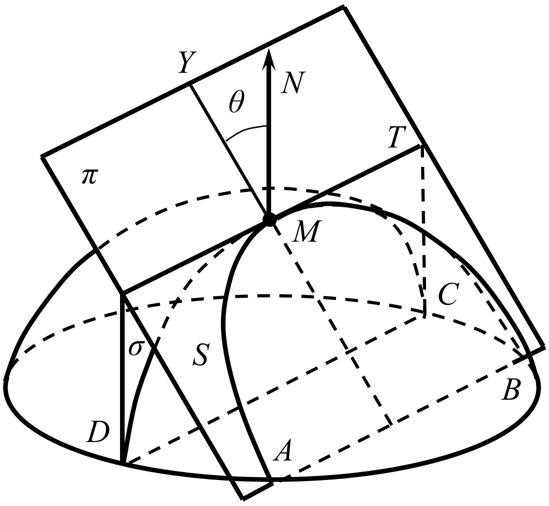

Рис. 4

Вторая, теорема Эйлера, утверждает: кривизна какого угодно нормального сечения в данной точке выражается линейно через кривизны главных нормальных сечений, т.е. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\sin^2\varphi$. Главными называются нормальные сечения, в которых кривизна принимает экстремальные значения. Для всякой точки поверхности существуют два таких сечения, и они взаимно перпендикулярны.

Здесь же Коркин отмечает, что поскольку доказательство теоремы Эйлера основано на возможности разложения в ряд Маклорена функции $z = f(x, y)$, которой определена поверхность, и что не все функции обладают этим свойством, то, следовательно, для некоторых точек поверхности теорема Эйлера не выполняется. Например, для поверхности $z = x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$ начало координат представляет такую особую точку.

Из теоремы Эйлера Коркин выводит следующее утверждение: сумма кривизн двух произвольных взаимно перпендикулярных нормальных сечений есть величина постоянная для данной точки поверхности и равная сумме кривизн главных сечений.

В заключение отмечается, что если все кривизны нормальных сечений будут одного знака, то поверхность около такой точки будет иметь вид как на рисунке 5.

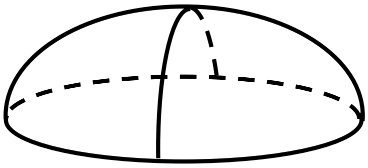

Рис. 5

Если же хотя бы две из них будут разных знаков, то поверхность около такой точки примет вид, показанный на рисунке 6. Случай, когда кривизны некоторых нормальных сечений обращаются в ноль, Коркин упустил из рассмотрения.

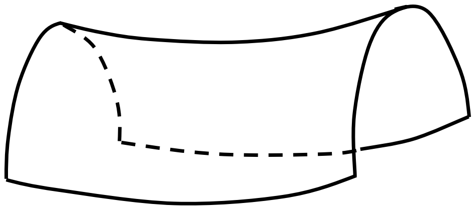

Рис. 6

Как видно из изложенного, рассмотренный курс давал полное представление об основных понятиях и теоремах классической дифференциальной геометрии, но, к сожалению, не отражал известных к тому времени результатов К. Ф. Гаусса.

Список использованной литературы

1. Ожигова Е. П. Александр Николаевич Коркин. Л., 1968.

2. Коркин А. Н. Дифференциальное исчисление. Лекции, читанные в Академическом корпусе Морских наук профессором А. Н. Коркиным. СПб., 1878.

Поступила в редакцию 03.06.2012 г.

Инесса Васильевна Игнатушина, кандидат физико-математических наук, доцент

Оренбургский государственный педагогический университет, кафедра математического анализа и методики преподавания математики.

460844, Российская Федерация, г. Оренбург, ул. Советская, 19.

E-mail: streleec@yandex.ru

I. V. Ignatushina

Questions of differential geometry in A. N. Korkin's course of lectures

The article analyzes questions of differential geometry, which are presented in the course of lectures on the differential calculus of a well-known Petersburg mathematician of the XIX century A. N. Korkin.

Key words: history of formation of higher mathematical education in Russia, differential geometry, A. N. Korkin.

Inessa Vasilyevna Ignatushina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor

Orenburg State Pedagogical University, Department of Mathematical Analysis and Mathematics Teaching Methodology.

460844, Russian Federation, Orenburg, ul. Sovetskaya, 19.

E-mail: streleec@yandex.ru