ВЕСТНИК ОРЕНБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Электронный научный журнал (Online). ISSN 2303-9922. http://www.vestospu.ru

УДК 372.851

**Н. М. Новак**

# Реализация некоторых идей И. Ф. Шарыгина при традиционном обучении геометрии

В статье показана возможность использования некоторых идей И. Ф. Шарыгина при традиционном обучении геометрии школьников. Основными целями является облегчение усвоения геометрического материала, повышение интереса к предмету.

*Ключевые слова:* вспомогательная окружность, «подвешивание» прямых, одна задача — много решений (методов решений).

Хотя учебник геометрии И. Ф. Шарыгина для 7—9 классов входит в число рекомендованных Министерством общего и профессионального образования РФ, в школах отдают предпочтение учебникам А. В. Погорелова или Л. С. Атанасяна (последний написан в соавторстве с В. Ф. Бутузовым, С. Б. Кадомцевым и др.).

Школьная геометрия Шарыгина — это геометрия фигуры, главное средство обучения — рисунок, картинка. Одной из важнейших фигур для него, очевидно, является окружность. Недаром он, ссылаясь на мудреца, провозглашает в предисловии: «Окружность — душа геометрии. Познайте окружность, и вы не только познаете душу геометрии, но и возвысите свою душу» [4, с. 4]. На самом деле, даже несложные задачи, связанные с окружностью, способны вызвать удивление у начинающих геометров и пробудить интерес к изучаемому предмету.

**Задача 1.** Окружность касается сторон угла с вершиной $A$. Расстояния от $A$ до точек касания равны 5. К окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках $B$ и $C$. Известно, что центр окружности расположен вне $\Delta ABC$. Найдите периметр $\Delta ABC$ (рис. 1).

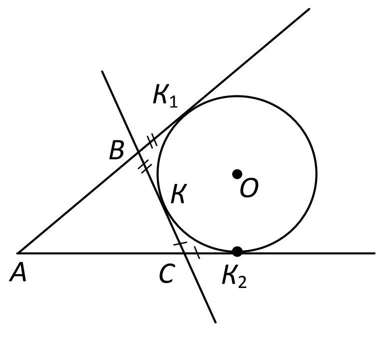


Рис. 1

Ясно, что периметр любого такого треугольника будет равен 10. Для доказательства достаточно воспользоваться свойством касательных к окружности, которое Шарыгин коротко формулирует следующим образом: касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны.

Размышляя над полученным результатом, ученик приходит к выводу, что, каким бы ни было расстояние от точки $A$ до точек касания, периметр $\Delta ABC$ будет ровно в два раза больше.

Привлекает внимание своей красотой метод вспомогательной окружности, используемый Шарыгиным [1, с. 78]. Его не рассматривают авторы двух выше названных учебников. А между тем он также дает возможность установить ряд интересных фактов.

**Задача 2.** На плоскости проведены две прямые, пересекающиеся в точке $O$, $M$ — точка на окружности с центром в $O$. Докажите, что расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из $M$ на данные прямые, постоянно для всех точек окружности [4, с. 135] (рис. 2).

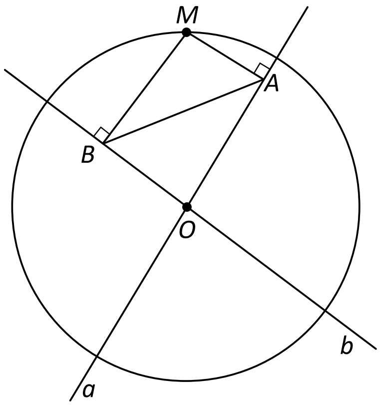


Рис. 2

Студенты, посещавшие спецкурс по методике преподавания математики, предложили следующее решение.

Дано: $a \cap b = O$, $\omega(O,\ R)$, $M$ — произвольна, $M \in \omega(O,\ R)$, $R$ — произвольно. $MA \perp a$, $MB \perp b$.

Доказать: $AB$ — const.

Решение. Так как $\angle MBO = \angle MAO = 90°$, точки $M$, $B$, $O$, $A$ лежат на окружности с диаметром $MO$.

Построим вспомогательную окружность, проходящую через точки $M$, $B$, $O$, $A$. Ее радиус $R_1 = \dfrac{R}{2}$, центр — точка $O_1$, являющаяся серединой $MO$ (рис. 3).

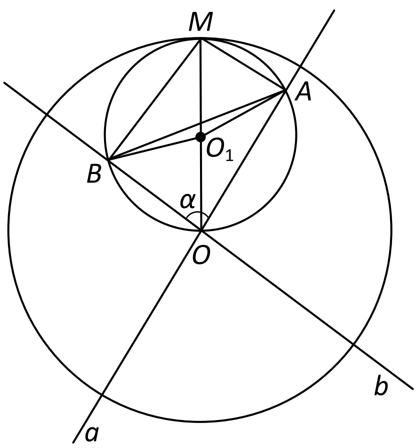


Рис. 3

Рассмотрим $\Delta AO_1B$. По теореме косинусов,

$$AB^2 = BO_1^2 + AO_1^2 - 2AO_1 \cdot BO_1 \cdot \cos 2\alpha\,,$$

где $\alpha$ — угол между прямыми $a$ и $b$.

Таким образом, $AB^2 = R_1^2 + R_1^2 - 2R_1 \cdot R_1 \cdot \cos 2\alpha = 2R_1^2(1-\cos 2\alpha) = \frac{R^2}{2}(1-\cos 2\alpha)$.

$$AB = R\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}.$$

Длина отрезка $AB$ зависит только от выбранного радиуса окружности и угла между пересекающимися прямыми. Она будет одной и той же при любом выборе точки $M$.

**Задача 3.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$. Докажите, что точка пересечения высот $\Delta ABC$ является центром вписанной в $\Delta A_1B_1C_1$ окружности.

**Задача 4.** Рассмотрим окружность, описанную около $\Delta ABC$. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности на прямые $AB$, $BC$, $CA$, лежат на одной прямой. Эта прямая носит название прямой Симсона [4, с. 137].

Последняя задача знакомит учащихся с прямой Симсона и открывает раздел задач, которые могут быть рассмотрены на заседаниях математического кружка. Соответствующий материал можно найти в задачниках В. В. Прасолова.

Метод вспомогательной окружности может быть использован при доказательстве теоремы о высотах треугольника, рассматриваемой практически во всех школьных учебниках.

***Теорема 1**. Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

Рассмотрим сначала остроугольный треугольник.

Проведем из вершин $A$ и $C$ высоты $AA_1$ и $CC_1$ к сторонам $BC$ и $AB$, которые пересекутся в точке $H$. Соединим точки $B$ и $H$ прямой, которая пересечет $CA$ в точке $B_1$. Докажем, что $BB_1$ — третья высота $\Delta ABC$.

*Доказательство*. Так как $\angle CA_1A = \angle CC_1A = 90°$, точки $C$, $A_1$, $C_1$, $A$ лежат на окружности с диаметром $AC$. Рассмотрим эту вспомогательную окружность (рис. 4).

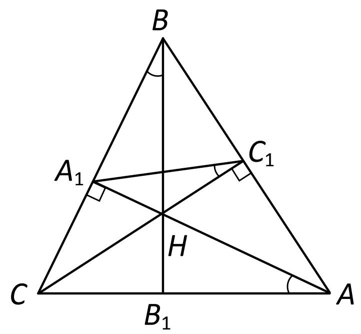


Рис. 4

Углы $A_1C_1C$ и $A_1AC$ равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. (Саму вспомогательную окружность можно не изображать; после достаточного числа упражнений она должна «рисоваться» в воображении учащихся.) Вторая вспомогательная окружность проходит через точки $A_1$, $B$, $C_1$, $H$. Ее диаметр — $BH$. Аналогично $\angle A_1BH = \angle A_1C_1H$. Итак, в треугольниках $CBB_1$ и $CAA_1$ угол $C$ — общий, $\angle CBB_1 = \angle CAA_1$. Следовательно, и третьи углы равны. $\angle CB_1B = \angle AA_1C = 90°$. То есть $BB_1$ — третья высота $\Delta ABC$.

Если треугольник тупоугольный, то доказательство аналогично. Только точки *B* и *H* меняются местами, и пересекаются не сами высоты, а прямые, которым они принадлежат (рис. 5). Если треугольник прямоугольный, то точка пересечения высот — вершина прямого угла (рис. 6).

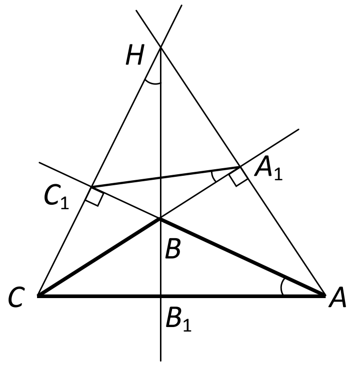


Рис. 5

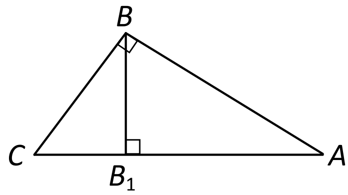


Рис. 6

Теорема о высотах треугольника доказывается в учебнике И. Ф. Шарыгина четырьмя различными методами. Кроме только что рассмотренного приводится доказательство, для которого через вершины данного $\Delta ABC$ проводятся прямые соответственно параллельные его сторонам; доказательство с использованием условия перпендикулярности двух прямых; доказательство с опорой на скалярное произведение векторов.

Таким образом, И. Ф. Шарыгин реализует свою идею «одна задача — много решений» (методов решений).

Эту идею можно и нужно проводить в жизнь, работая по учебникам А. В. Погорелова и Л. С. Атанасяна. Материала для этого они содержат достаточно. Речь идет не только о различных способах доказательства теоремы Пифагора. Для этого подходят и теорема о средней линии треугольника, и о свойстве биссектрисы угла треугольника, и другие.

Рассмотрим различные доказательства теоремы о средней линии треугольника.

***Теорема 2.*** *Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.*

*Способ 1*. Продолжим отрезок *MN*, являющийся средней линией, за точку *N* на расстояние, равное ему: $NK = MN$ . Соединим точки *K* и *C* и рассмотрим четырехугольник *AMKC*. Если удастся установить, что этот четырехугольник — параллелограмм, то теорема будет доказана (рис. 7).

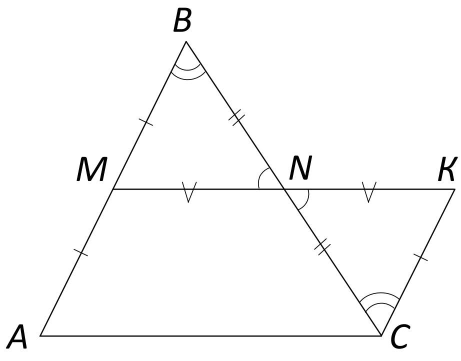


Рис. 7

$\Delta BNM = \Delta CNK$ по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников следует, что $MB = KC$. Но $MB = AM$. Значит, $AM = KC$. Кроме того, $\angle MBN = \angle NCK$ как углы, лежащие в равных треугольниках против равных сторон. Так как эти углы являются внутренними накрест лежащими при прямых *AB*, *CK* и секущей *BC*, то $AB \| KC$. $AM = KC$ и $AM \| KC$. Значит, *AMKC* — параллелограмм.

*Способ 2*. Пусть *M* — середина *AB*. Проведем через *M* прямую, параллельную *AC*. *N* — точка пересечения *BC* и этой прямой. По теореме Фалеса $BN = NC$. То есть *MN* — средняя линия $\Delta ABC$. Остается доказать, что $MN = \frac{1}{2}AC$.

Через точку *N* проведем прямую, параллельную *AB*. *D* — точка пересечения этой прямой с *AC*. По теореме Фалеса $AD = DC$. Но *AMND* — параллелограмм. Значит, $MN = \frac{1}{2}AC$ (рис. 8).

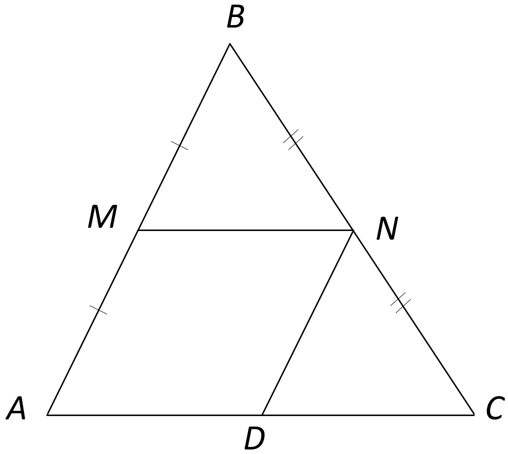


Рис. 8

*Способ 3 (векторный)*. Пусть *MN* — средняя линия $\Delta ABC$. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$ (рис. 9).

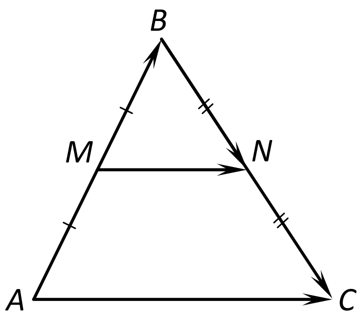


Рис. 9

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BN} = 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}) = 2\overrightarrow{MN}.$$

Итак, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN}$. Значит, векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{MN}$ — коллинеарны, поэтому прямые *AC* и *MN* — параллельны. Кроме того, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\left|\overrightarrow{MN}\right|$, значит, $MN = \frac{1}{2}AC$.

*Способ 4 (с применением гомотетии).* Пусть $MN$ — средняя линия $\Delta ABC$. Рассмотрим гомотетию с центром в точке $B$ и коэффициентом $k=2$. Она переводит точку $M$ в точку $A$ и точку $N$ — в $C$, то есть отрезок $MN$ переходит в $AC$. Значит, $AC=2MN$. Кроме того, прямая $MN$ не проходит через центр гомотетии, а следовательно, переходит в прямую, ей параллельную. Таким образом, $MN \parallel AC$ (рис. 10).

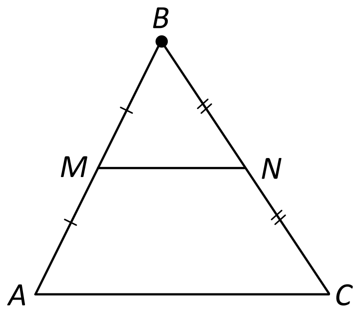


Рис. 10

*Способ 5 (с применением теоремы косинусов)* (рис. 11). Пусть $MN$ — средняя линия $\Delta ABC$. Из $\Delta MBN$ по теореме косинусов

$$MN^2 = MB^2 + BN^2 - 2\cdot MB\cdot BN\cdot \cos\alpha ,$$

где $\alpha$ — угол между сторонами $AB$ и $BC$. Из $\Delta ABC$ по теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot \cos\alpha .$$

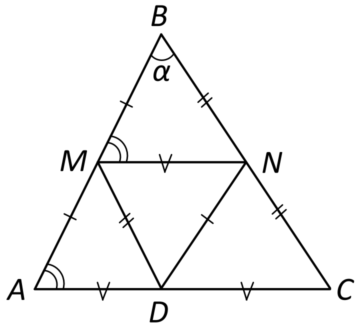


Рис. 11

Так как $AB=2MB$ и $BC=2BN$, то $AC^2 = 4MB^2 + 4BN^2 - 2\cdot 4\cdot MB\cdot BN\cdot\cos\alpha = 4(MB^2+BN^2-2MB\cdot BN\cdot\cos\alpha) = 4\cdot MN^2$.

Итак, $AC^2 = 4MN^2$. Значит, $AC=2MN$. $\Delta MBN$ подобен $\Delta ABC$ по третьему признаку подобия треугольников ($k=2$). Из этого следует, что $\angle BMN = \angle BAC$. Так как углы являются соответственными при прямых $MN$, $AC$ и секущей $AB$, то $MN \parallel AC$. Теорема доказана.

*Замечание.* Если обозначить буквой $D$ середину отрезка $AC$, то можно получить еще две средние линии данного треугольника: $ND$ и $MD$. При этом $\Delta ABC$ разбивается на четыре одинаковых (равных) треугольника. Так наглядно подтверждается теорема о том, что отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия:

$$S_{\Delta ABC} : S_{\Delta MBN} = 4:1 .$$

Последнее решение и замечание предложены студентами. В этом решении использован алгебраический метод: теорема косинусов. Хотя при решении геометрических задач предпочтительны внутренние чисто геометрические методы (способы 1; 2), с внешними общими методами (векторным, алгебраическим) необходимо знакомить на более поздних этапах обучения (способы 3; 5) [1, с. 75]. Метод преобразований плоскости (способ 4) также стоит особняком. Рассмотрением геометрических преобразований плоскости, как правило, завершается курс школьной планиметрии. Без знакомства с теорией преобразований плоскости геометрическое знание представляется недостаточным.

Остановимся на еще одной полезной рекомендации И. Ф. Шарыгина, касающейся начала изучения стереометрии. Он считает, что основное содержание курса стереометрии составляет геометрия тел, в первую очередь многогранников. Простейшие многогранники должны появляться в курсе с самого начала, выполняя функции своеобразных опор для «подвешивания» прямых. Тем самым реализуется одна из важнейших практических и теоретических установок: надо научиться привязывать рассматриваемую ситуацию к тому или иному простейшему многограннику, удобному для изображения.

Покажем, как можно воплотить эту идею при решении стереометрической задачи.

**Задача 5.** К плоскости прямоугольника *ABCD* восставлен перпендикуляр *BK*. Найти расстояние от точки *K* до всех вершин прямоугольника, если $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $BK = 2$ см (рис. 12).

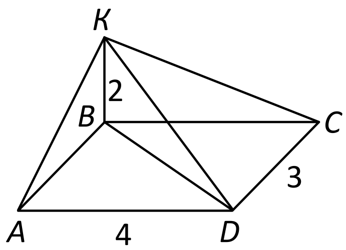


Рис. 12

*Дано: ABCD* — прямоугольник, $BK \perp ABCD$, $BK = 2$ см, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см.

*Найти: AK, DK, CK.*

*Решение*. Ясно, что расстоянием до вершины *B* будет длина перпендикуляра *BK*, то есть 2 см. *KC* найдем из прямоугольного $\Delta KBC$.

$$KC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ (см).}$$

Аналогично из прямоугольного $\Delta ABK$

$$AK = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \text{ (см).}$$

*KD* можно найти двумя способами. Во-первых, из прямоугольного $\Delta KCD$, где $KC \perp DC$ по теореме о трех перпендикулярах:

$$KD = \sqrt{KC^2 + DC^2} = \sqrt{20+9} = \sqrt{29} \text{ (см);}$$

во-вторых, из прямоугольного $\Delta KBD$, найдя предварительно диагональ *BD* прямоугольника *ABCD*. Из $\Delta ABD$

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см).}$$

Из $\Delta KBD$

$$KD = \sqrt{KB^2 + BD^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \text{ (см).}$$

Вычислительная часть решения довольно проста. Несколько раз применяется теорема Пифагора. Однако требуется теоретическое обоснование того, что треугольники *ABK*, *BKD* — прямоугольные. Конечно, это следует из того, что отрезок, перпендикулярный плоскости *ABCD*, перпендикулярен любой прямой, лежащей в этой плоскости. Но углы *KBA*, *KBD* на чертеже совсем не похожи на прямые. Да и изображение самого перпендикуляра *BK* к плоскости *ABCD* на первых порах, когда еще не сформировано пространственное воображение, весьма затруднительно. Нужны специальные разъяснения учителя того, как это делается. Помочь «увидеть», как располагаются в пространстве искомые отрезки, может «подвешивание» их к хорошо знакомому многограннику. Это может быть прямоугольный параллелепипед. А сама задача формулируется в этом случае следующим образом.

**Задача 6.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на боковом ребре $BB_1$ взята точка *K* так, что $BK = 2$ см. Найти расстояние от точки *K* до всех вершин основания $ABCD$, если $AB = 3$ см, $BC = 4$ см (рис. 13).

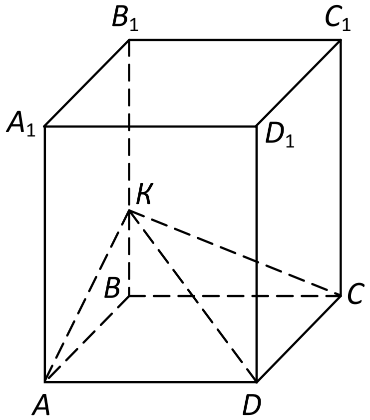


Рис. 13

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, *ABCD* — прямоугольник, $BB_1 \perp ABC$, $BK = 2$ см, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см.

Найти: *AK*, *KD*, *KC*.

Это, по сути дела, та же самая задача. Но с помощью последнего рисунка удается перевести ситуацию в знакомое русло. Ведь учащиеся давно знают, что все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками, а боковые ребра перпендикулярны к плоскости основания. Если предложить задачу в такой форме, обоснование решения не вызовет затруднений.

И. Ф. Шарыгин придавал обучению геометрии большое развивающее и гуманитарное значение. Он внес значительный вклад в педагогику, сделав прозрачными и ясными многие вопросы методики преподавания геометрии в школе. Реализация его идей поможет стать геометрии легким и любимым предметом.

**Список использованной литературы**

1. Шарыгин И. Ф. Нужна ли школе XXI века геометрия? // Мат. в шк. 2004. № 4.

2. Богданов И. И., Заславский А. А. III геометрическая олимпиада имени И. Ф. Шарыгина // Мат. в шк. 2008. № 8.

3. Заславский А. А. VII олимпиада по геометрии имени И. Ф. Шарыгина // Математика для школьников. 2011. № 1.

4. Шарыгин И. Ф. Геометрия. 7—9 классы. М. : Дрофа, 1998.

Поступила в редакцию 05.06.2012 г.

***Новак Наталья Михайловна***, кандидат педагогических наук, доцент

Оренбургский государственный педагогический университет, кафедра математического анализа и методики преподавания математики

460844, Российская Федерация, г. Оренбург, ул. Советская, 19

E-mail: akimov_ia@mail.ru

**N. M. Novak**

## The implementation of some Sharygin's ideas in the traditional teaching of geometry

The article shows the possibility of using some of the Sharygin's ideas in the traditional teaching of geometry to pupils. The main objectives are to ease the learning of geometry, to increase the interest in the subject.

*Key words:* auxiliary circle, "hanging" lines, one problem — many solutions (solution method).

***Novak Natal'ya Mikhailovna***, candidate of pedagogic sciences, assistant professor.

Orenburg State Pedagogical University, Department of Mathematical Analysis and Methodic of Teaching Mathematics

460844, Russian Federation, Orenburg, ul. Sovetskaya, 19.

E-mail: akimov_ia@mail.ru