УДК 372.851(091):512.06

Е. А. Максютова

Решение алгебраических уравнений в «Универсальной арифметике» Л. Эйлера

Сочинение Леонарда Эйлера «Универсальная арифметика» (1768—1769) заняло особое место в учебной литературе XVIII века и оказало определяющее влияние на учебную литературу XIX века. Это сочинение представляло собой учебник алгебры, который стал прототипом для последующих учебников и учебных пособий по этому предмету. В нем изложена элементарная алгебра, разработана теория логарифмов и построена теория уравнений до четвертой степени включительно. Данная статья посвящена одному из разделов учебника — «Об алгебраических уравнениях». Рассмотрены основные способы решения линейных и квадратных уравнений, а также систем линейных уравнений с несколькими неизвестными. Исследованы и проанализированы методы решения уравнений высших степеней и выявлен разработанный Эйлером метод решения уравнений 4-й степени, именуемый в настоящее время «решением Декарта — Эйлера».

***Ключевые слова*:** учебник алгебры, универсальная арифметика, Леонард Эйлер, решение уравнений, алгебраические уравнения.

В развитии математического образования в России важную роль сыграло двухтомное сочинение Леонарда Эйлера (1707—1783), опубликованное в 1768—1769 гг. под названием «Универсальная арифметика» [4]. Более полувека оно являлось основным учебным руководством по алгебре и оказало влияние на учебники XIX века [2].

«Универсальная арифметика» имеет четкую и логичную структуру. Она состоит из двух частей и содержит элементарную алгебру, включая учение об уравнениях. Эйлер рассматривал не только алгебраические уравнения с первой по четвертую степень, но и неопределенные уравнения до 3-й степени включительно со многими неизвестными. Поэтому материал, излагаемый в его сочинении, представлялся слишком трудным для применения в средней школе. В дальнейшем «Универсальная арифметика» была значительно переработана и адаптирована для учебных целей Н. И. Фуссом (1755—1825), учеником Эйлера. Именно его «Начальные основания, выбранные из «Алгебры» покойного г. Леонарда Эйлера» (1798) [3] явились прототипом всех появившихся позднее русских пособий по алгебре.

Нужно отметить, что алгебраические сведения, которые приведены в «Универсальной арифметике», по своему содержанию и характеру изложения во многом не отличаются от современных. В данной статье остановимся на алгебраических уравнениях и их решениях.

Эйлер приводит множество приемов решения уравнений до 4-й степени включительно, иллюстрируя изложение большим количеством примеров и стремясь как можно подробнее объяснить основные моменты. Таким образом он объясняет принцип составления уравнения исходя из условия задачи. Искомые величины он обозначает последними буквами латинского алфавита, а затем устанавливает связь между данными и искомыми величинами, которая в математической форме выражается в виде уравнения.

К уравнениям 1-й степени Эйлер относит не только линейные, но также дробно-рациональные, иррациональные и показательные уравнения, т.е. уравнения вида

$$\frac{a}{bx} = c, \sqrt{ax+b} = c \quad \text{и } a^x = b.$$

Сюда же Эйлер относит системы n-линейных уравнений с n неизвестными. Их решения осуществляются различными способами: методом почленного сложения уравнений, методом подстановки, с помощью введения дополнительных неизвестных.

Последний метод Эйлер объясняет при решении следующей задачи:

«Трое играют вместе, в первую игру проиграл первый из них обоим другим столько, сколько каждый из них имел. В другую игру проиграл второй первому и третьему столько, сколько каждый из них имеет. В третью игру проиграл третий первому и второму столько, сколько каждый из них имел. И по окончании игры нашлось, что все они по ровному числу имеют, а именно 24 флорена. Спрашивается, сколько каждый из них имел сначала?»

Обозначив через x, y, z первоначальную сумму каждого игрока, Эйлер вводит четвертую неизвестную s, где $x + y + z = s$. По условию, первый игрок проигрывает ту сумму в первую игру, какую имеют другие два участника, т.е. $y + z = s - x$, после чего у него останется $x - (s - x) = 2x - s$ денег. Следовательно, второй и третий игроки будут иметь после первой игры $2y$ и $2z$ денег соответственно.

Во второй игре проигрывает второй игрок, а в третьей — третий игрок, с теми же условиями. Поэтому после второй игры расклад будет следующим: 1) $4x - 2s$, 2) $4y - s$, 3) $4z$. После третьей: 1) $8x - 4s$, 2) $8y - 2s$, 3) $8z - s$. При этом после третьей игры каждый участник имел сумму в 24 флорена.

Решение задачи находится из следующей системы:

$$\begin{cases} 8x - 4s = 24, \\ 8y - 2s = 24, \\ 8z - s = 24, \\ x + y + z = s. \end{cases}$$

В разделе, посвященном квадратным уравнениям, рассматриваются способы решения уравнений вида: $ax^2 = c$, $ax^2 = bx$, $ax^2 \pm bx \pm c = 0$.

Для решения полного квадратного уравнения $ax^2 \pm bx \pm c = 0$ оно сначала приводится к виду $x^2 \pm px \pm q = 0$, а затем применяется общая формула для вычисления корней

$$x = \frac{\pm p \pm \sqrt{p^2 \pm 4q}}{2}.$$

Решение находится также по теореме Виета, которую Эйлер называет главным свойством квадратных уравнений. К этому свойству он приходит после того, как выводит формулу для вычисления квадратного корня из двучленов, содержащих квадратные радикалы: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.

Эйлер постоянно отмечает зависимость количества корней от степени уравнения. Поэтому, решая кубическое уравнение $x^3 = a$, он указывает на существование единственного вещественного корня $x = \sqrt[3]{a}$ и пары комплексно сопряженных корней

$$x = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{a}.$$

Решение полных кубических уравнений осуществляется несколькими методами. Их выбор зависит от формы уравнения и наличия рациональных корней.

Первым методом является разложение кубического уравнения $x^3 \pm ax^2 \pm bx \pm c = 0$ на множители. Этот метод применяется в случае существования рациональных корней. Поскольку многочлен третьей степени $x^3 \pm ax^2 \pm bx \pm c$ представляется произведением линейного и квадратичного сомножителей, то для решения кубического уравнения достаточно найти один корень. Необходимый корень ищется среди делителей свободного члена уравнения, после чего многочлен $x^3 \pm ax^2 \pm bx \pm c$ делится на выражение $(x - \alpha)$ без остатка. Частное от деления представляет собой квадратный многочлен, корни которого находятся по выведенной ранее формуле.

Если в уравнении ни один из делителей свободного члена не является корнем, то такие уравнения не имеют корней ни в целых, ни в дробных числах. Эти корни являются иррациональными или комплексными. Для их вычисления Эйлер использует метод Кардано. Он заключается в том, что любое кубическое уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ при помощи замены $x = y - \frac{b}{3a}$ можно привести к виду $y^3+py+q=0$, одно решение которого находится по формуле, известной как «формула Кардано»:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\ .$$

Уравнения четвертой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ Эйлер называет биквадратными. Их решения также осуществляются несколькими способами.

Первый из них аналогичен решению кубических уравнений и состоит в разложении на множители. Один из корней p, если он рационален, можно подобрать среди делителей свободного члена. Тогда, разделив уравнение на выражение $(x–p)$, получим кубическое уравнение, решение которого осуществляется рассмотренными ранее методами.

Эйлер утверждает, что однородные уравнения четвертой степени, то есть уравнения вида $x^4 \pm ma\cdot x^3 \pm na^2\cdot x^2 \pm ma^3\cdot x + a^4=0$, всегда можно представить в виде произведения двух множителей $(x^2+pax\pm a^2)(x^2+qax\pm a^2)=0$, где p и q находятся из системы:

$$\begin{cases} p+q=m, \\ pq\pm 2=n. \end{cases}$$

Тогда решение однородных уравнений четвертой степени сводится к решению двух квадратных уравнений.

Следующим способом решения является метод Феррари, который Эйлер называет «правилом Бомбелли». Его применяют в том случае, когда уравнение не имеет корней в целых и дробных числах, т. е. если ни один из делителей свободного члена уравнения не является корнем. В этом случае уравнение $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ представляют в виде $(x^2 + \frac{1}{2}ax + p)^2 – (qx + r)^2 = 0$, где p, q и r находятся из системы:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a^2 + 2p - q^2 = c, \\ ap - 2qr = c, \\ p^2 - r^2 = d. \end{cases}$$

Через найденное значение p находятся остальные неизвестные в системе: $q=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+2p-b}$ и $r=\frac{ap-c}{2}$.

Отсюда решение общего уравнения сводится к решению двух квадратных уравнений: $x^2+\frac{1}{2}ax+p=\pm(qx+r)$ или $x^2+(\frac{1}{2}a\pm q)x+(p\pm r)=0$.

Наконец, последний способ решения уравнений четвертой степени Эйлер называет «новым решением биквадратных уравнений». Этот метод был разработан им на основе подстановок Декарта. Именно поэтому «новое решение» в настоящее время именуется «решением Декарта — Эйлера» [1]. Для начала из уравнения $y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$ исключается куб с помощью подстановки Декарта $y=x-\frac{1}{4}a$.

Тогда

$$y=x-\frac{1}{4}a,\ cy=cx-\frac{1}{4}ac,$$

$$y^2=x^2-\frac{1}{2}ax+\frac{1}{16}a^2,\ by^2=bx^2-\frac{1}{2}bax+\frac{1}{16}ba^2,$$

$$y^3=x^3-\frac{3}{4}ax^2+\frac{3}{16}a^2x-\frac{1}{64}a^3,\ ay^3=ax^3-\frac{3}{4}a^2x^2+\frac{3}{16}a^3x-\frac{1}{64}a^4$$

$$y^4=x^4-ax^3+\frac{3}{8}a^2x^2+\frac{1}{16}a^3x+\frac{1}{256}a^4.$$

Отсюда

$$y^4+ay^3+by^2+cy+d=$$

$$=x^4+(b-\frac{3}{8}a^2)x^2+(\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c)x+(\frac{1}{16}a^2b-\frac{3}{256}a^4-\frac{1}{4}ac+d)=0$$

или $x^4+Ax^2+Bx+C=0$.

Затем в качестве корня получившегося уравнения принимается величина $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, где $p,\ q,\ r$ — три корня некоторого кубического уравнения $z^3-fz^2+ +gz-h=0$, т.е.

$$\begin{cases} p+q+r=f, \\ pq+pr+qr=g, \\ pqr=h. \end{cases}$$

Ход решения следующий:

$$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},$$

$$x^2=(p+q+r)+2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr},$$

$$x^2-f=2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr},$$

$$(x^2-f)=(2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr})^2,$$

$$x^4-2x^2f+f^2=4pq+4pr+4qr+8\sqrt{p^2qr}+8\sqrt{pq^2r}+8\sqrt{pqr^2},$$

$$x^4-2x^2f+f^2-4(pq+pr+qr)=8\sqrt{pqr}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}),$$

$x^4–2x^2f+f^2–4g=8x\sqrt{h}$,

$x^4–2x^2f–8x\sqrt{h}+f^2–4g=0$.

Получившееся уравнение имеет корень $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, поэтому многочлены

$$x^4 - 2x^2f - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g \text{ и } x^4 + Ax^2 + Bx + C$$

равны. Алгебраическое равенство многочленов означает равенство коэффициентов при соответствующих неизвестных. Поэтому составляется соотношение коэффициентов уравнения $x^4 - 2x^2f - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0$ с коэффициентами исходного уравнения $x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$ следующим образом: $2f = A$, $8\sqrt{h} = B$, $f^2 - 4g = C$, откуда $f=\frac{A}{2}$, $h=\frac{B^2}{64}$, $g=\frac{A^2+4C}{16}$.

Полученные значения f, g, h подставляются в уравнение $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$. Решая его рассмотренными ранее методами, Эйлер находит корни p, q, r, которые затем определят искомый корень $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$.

Однако любое алгебраическое уравнение имеет столько корней, каков показатель его степени. Поэтому Эйлер дает формулы для нахождения остальных трех корней уравнения четвертой степени в зависимости от знака свободного члена:

1. Если свободный член уравнения положителен, то корнями этого уравнения будут величины:

$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, $x=\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}$, $x=-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}$ и $x=-\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}$.

2. Если же свободный член уравнения отрицательный, то корнями будут величины:

$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}$, $x=\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}$, $x=-\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ и $x=-\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}$.

Рассмотренные методы решения уравнений 3-й и 4-й степени требуют проведения большой серии трудоемких и достаточно долгих вычислений. Однако существуют более быстрые способы вычисления корней, а именно итерационные методы. Они состоят в приближенном вычислении корней уравнения.

Первым методом является метод простой итерации, который применяется в том случае, если известно, что корень уравнения $f(x) = 0$ лежит в интервале $(n; n+1)$.

Сначала Эйлер рассматривает уравнения вида $x^m = a$, решение которых сводится к приближенному вычислению корней $\sqrt[m]{a}$. Для этого осуществляется замена $x=n+p$ и выводится итерационная формула $x=\frac{(m-1)\cdot n^m+a}{m\cdot n^{m-1}}$. Подбирая начальное значение m, мы получаем первое приближение к корню уравнения. Затем на каждом последующем шаге используется данная формула, которая выражается через значения, полученные на предыдущих шагах. Таким образом генерируется последовательность чисел x_1, x_2, ..., x_k, которая сходится к корню уравнения.

Например, для нахождения корня уравнения $x^2 = 2$ подбирается значение n в уравнении $x=\frac{n^2+a}{2n}$:

1) если $n = 1$, то $x = \frac{3}{2}$;

2) если $n = \frac{3}{2}$, то $x = \frac{17}{12}$;

3) если $n = \frac{17}{12}$, то $x = \frac{577}{408}$, и т.д.

На третьем шаге вычисление прекращается, поскольку погрешность вычисления достаточно мала, так как квадрат последнего значения превосходит число 2 на величину, равную $\frac{1}{1664648}$.

Эйлер применяет также простой метод итерации для решения общего кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, в котором полагается $x = n - p$, откуда $x^2 = n^2 - 2np$ и $x^3 = n^3 - 3n^2p$.

Таким образом, итерационной формулой является выражение $x = \frac{2n^3 + an^2 - c}{3n^2 + 2an + b}$.

Во втором итерационном методе, рассмотренном Эйлером, предлагается подобрать такой ряд чисел *a, b, c, d*…, чтобы отношение каждого члена к предыдущему давало бы в частном величину корня «тем аккуратнее, чем далее сей ряд чисел продолжаться будет». Тогда в ряду *a, b, c, d … p, q, r, s, t*… отношение $\frac{q}{p}$ будет достаточно близко подходить к корню *x*, как и отношения $\frac{r}{q}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{t}{s}$… Отсюда, $\frac{r}{p} = x^4$, $\frac{s}{p} = x^3$, $\frac{t}{p} = x$ и т.д.

Например, для уравнения $x^2 = x + 1$ подбирается ряд чисел *p, q, r, s, t*…, из которого $\frac{q}{p} = \frac{r}{q} = \ldots = x$, $\frac{r}{p} = \frac{s}{q} = \ldots = x^2$. После соответствующих подстановок в уравнение получается система уравнений, из которой видно, что каждый член в ряду представляет собой сумму двух предыдущих:

$$\begin{cases} r = q + p, \\ s = r + p, \\ t = s + r, \\ \ldots . \end{cases}$$

Если принять $p = 0$ и $q = 1$, в результате получается ряд Фибоначчи: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 и т.д.

Составлением отношений каждого из членов к предыдущему строится ряд «приближающихся» величин для корня *x*: $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \ldots$

Так, например, для значения $x = \frac{21}{13}$ получим выражение, в котором погрешность составляет $\frac{1}{169}$. Если выбирать каждую последующую дробь в ряду, погрешность будет становиться меньше и эта дробь будет ближе подходить к величине корня уравнения.

Не всегда удачно происходит построение ряда «приближающихся» чисел. Так, например, для уравнения $x^2 = 2$ подбирается ряд, в котором $r = 0q + 2p$, $s = 0r + 2q$, … То есть при выборе $p = 1$ и $q = 1$ происходит ряд 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, …; при $p = 1$ и $q = 2$ происходит ряд 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, …, из которых видно, что отношение каждого члена к предыдущему дает $x = 1$ или $x = 2$. Получившегося противоречия можно избежать, если произвести замену $x = y - 1$. Тогда решение уравнения $x^2 = 2$ сведется к решению уравнения $y^2 = 2y + 1$, которое производится достаточно просто.

Эйлер утверждает, что точное решение уравнений 5-й и выше степеней невозможно. Однако он приводит некоторые случаи приближенного вычисления корней высших степеней. Так, методом простой итерации решается уравнение $x^5 - 6x - 10 = 0$: итерационной формулой для него является выражение $x = \dfrac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$. В заключение рассматривается уравнение бесконечно большого порядка $x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots$, где $n \to \infty$, для которого «приближающийся» ряд составлен из таких чисел, что каждый последующий член ряда равен сумме всех предыдущих, т.е. 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128… Отсюда видно, что наибольший корень уравнения есть $x = 2$. Это доказывается тем, что при делении обеих частей уравнения на старшую степень получается уравнение, в правой части которого получится сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{x}$:

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots = \frac{1}{x-1}.$$

Тогда $x = 2$.

На этом изложение учения об алгебраических уравнениях заканчивается.

Таким образом, в своем сочинении Эйлер не только объединил все результаты, относящиеся к решению алгебраических уравнений до 4-й степени включительно, полученные в его время, но предложил также результаты, такие как теория логарифмов и решение уравнений 4-й степени, называемое в настоящее время «решением Декарта — Эйлера» [1, с. 44]. Разработанные Эйлером методы и теории легли в основу будущих учебников и учебных пособий по алгебре.

Список использованной литературы

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. : Наука, 2003.
2. Полякова Т. С. Леонард Эйлер и математическое образование в России. М. : URSS, 2007. 184 с.
3. Фусс Н. Начальные основания алгебры в пользу Императорского шляхетского сухопутного кадетского корпуса, выбранные из Алгебры покойного г. Леонгарда Эйлера господином Николаем Фусом: перевод с французского подлинника. СПб. : Имп. шляхетский сухопутный корпус, 1798. 553 с.
4. Эйлер Л. Универсальная арифметика г. Леонгарда Эйлера. Переведенная с немецкого подлинника Академии наук адъюнктом Петром Иноходцовым и студентом Иваном Юдиным. Т. 1—2. СПб. : Имп. АН, 1768—1769.

Поступила в редакцию 20.04.2014 г.

Максютова Екатерина Александровна, аспирант
Оренбургский государственный педагогический университет
460014, Российская Федерация, г. Оренбург, ул. Советская, 19
E-mail: kanonykhina@yandex.ru

UDC 372.851(091):512.06

E. A. Maksyutova

Solution of algebraic equations in L. Euler's "Universal Arithmetic"

Leonhard Euler's work "Universal arithmetic" (1768—1769) took a special place in the educational literature of the XVIII century and influenced the educational works of the XIX century. This work was an algebra book, which became the prototype for further textbooks on the subject. It sets out basic algebra, the theory of logarithms and the theory of equations up to the fourth degree. This article is devoted to one of the sections of the work "On algebraic equations". The main methods of solving linear and quadratic equations and systems of linear equations with several variables are given. The article studies and analyzes the methods of solving equations of the highest degrees, as well as discloses the Euler's method to solve equations of the 4-th degree better known as "solution of Descartes — Euler".

Key words: algebra book, universal arithmetic, Leonhard Euler, solving equations, algebraic equations.

Maksyutova Ekaterina Alexandrovna, Postgraduate Student
Orenburg State Pedagogical University
460014, Russian Federation, Orenburg, ul. Sovetskaya 19
E-mail: kanonykhina@yandex.ru