

УДК 372.8:514.7

И. В. Игнатушина

Принцип центризма научного текста и его реализация в обучении дифференциальной геометрии

В статье описывается содержание и условия реализации нового принципа обучения математике в вузе — принципа центризма научного текста. Согласно ему научный математический текст выступает в качестве объекта изучения и может рассматриваться как аутентичная дидактическая единица в обучении математике. На примере одного занятия по дифференциальной геометрии показана технология работы с научным текстом.

Ключевые слова: обучение, дифференциальная геометрия, принцип центризма научного текста.

Процесс педагогической адаптации научных фактов при формировании учебных курсов является необходимым. Однако со временем содержание этих курсов отшлифовывается, изложение теорий становится весьма кратким, подчас настолько, что оказываются утерянными сами причины, подтолкнувшие ученых разрабатывать данные области. Между тем побудительные мотивы первопроходцев служат источником формирования интереса студентов к объекту изучения.

Для решения этой проблемы мы предлагаем в процессе обучения математике в вузе активно использовать труды создателей изучаемой науки. В связи с этим нами был выдвинут *принцип центризма научного текста*, согласно которому научный математический текст выступает в качестве объекта изучения и может рассматриваться как аутентичная дидактическая единица в обучении математике. Рассматривая ход мыслей ученого в получении той или иной теоремы, студенты формируют и развивают определенные приемы мышления (анализ, синтез, обобщение и др.), способствующие освоению учебного курса.

В зависимости от индивидуальных особенностей обучаемых мышление, согласно работам [1—3, 5], классифицируется по видам (наглядно-действенное, наглядно-образное, словесно-логическое), типам (эмпирическое и теоретическое) и качествам (гибкость, глубина, критичность). Б. М. Теплов [6] подразделяет мышление на теоретическое (понятийное, образное) и практическое (наглядно-образное и наглядно-действенное). Теоретическое мышление направлено в основном на нахождение общих закономерностей, а практическое — на разрешение частных конкретных задач. Оба указанных вида мышления носят алгоритмический характер, т. е. представляют собой процессы поиска алгоритмов решения проблем.

Следует отметить, что принцип центризма научного текста тесно связан с принципом научности, но в отличие от него подразумевает не опосредованное, т.е. преломленное методической обработкой, а непосредственное знакомство с научным материалом через изучение работ ученых, сыгравших важную роль в истории изучаемой дисциплины.

Для реализации принципа центризма научного текста необходимо выполнение следующих *условий*:

- постепенное наращивание используемых лексических единиц;
- владение учащимися минимальным запасом терминов, встречающихся в изучаемом тексте, в том числе и на языке оригинала;
- демонстрация преподавателем теоретической и прикладной роли изучаемого материала как внутри курса, так и вне его.

© Игнатушина И. В., 2016

При знакомстве студентов с историей появления и первыми шагами дифференциальной геометрии незаменимыми являются научные трактаты одного из создателей данного раздела математики Леонарда Эйлера (1707—1783). Его сочинения по приложению дифференциального исчисления к геометрии написаны столь доходчиво и живо, что могут стать прекрасным дополнением к современной учебной литературе по дифференциальной геометрии, а также стартовой площадкой для приобщения студентов к научно-исследовательской деятельности. Не лишним здесь будет вспомнить и знаменитую фразу П. С. Лапласа, которую он повторял молодым математикам: «Читайте, читайте Эйлера, он — наш общий учитель». Следует отметить, что в своих научных текстах Л. Эйлер всегда оставляет возможность своим читателям для самостоятельных размышлений и доказательства тех логических переходов, которые посильны им. Таким образом, изучая эти работы, студенты осваивают дифференциальную геометрию.

Технология работы с научным текстом основывается на базовом дидактическом цикле, состоящем из трех этапов (стадий).

Каждый этап имеет свои цели и задачи, а также набор характерных приемов, направленных сначала на активизацию исследовательской, творческой деятельности, а потом на осмысление и обобщение приобретенных знаний.

Первая стадия — «введение в проблему», во время которой создаются условия для актуализации у студентов опорных знаний, пробуждения интереса к теме, определения цели изучения предстоящего учебного материала.

Вторая стадия — «осмысление» — содержательная, в ходе которой происходит непосредственная работа обучающегося с текстом, причем работа направленная, осмысленная. Процесс чтения всегда сопровождается действиями студента (маркировка, составление таблиц, ведение дневника), которые позволяют отслеживать собственное понимание.

Третья стадия — «рефлексия» — размышление. На этом этапе у студента формируется личностное отношение к тексту, которое может быть зафиксировано либо с помощью собственного текста, либо своей позиции в дискуссии. Именно здесь происходит активное переосмысление собственных представлений с учетом вновь приобретенных знаний.

Покажем на конкретном примере технологию проведения занятия по работе с научным текстом.

Тема: Эволюта и эвольвента плоской кривой.

Цель: закрепить понятия «эволюта» и «эвольвента» плоской кривой, с которыми студенты познакомились на лекции; рассмотреть основные свойства эволюты плоской линии; выяснить, какие кривые имеют n -ю эволюту, подобную исходной кривой.

«Введение в проблему». Преподаватель сообщает, что понятия «эволюта» и «эвольвента» кривой были введены известным голландским математиком, физиком и астрономом XVII в. Христианом Гюйгенсом (1629—1695) в его работе «Маятниковые часы, или Геометрические доказательства, относящиеся к движению маятников, приспособленных к часам» (1673).

Затем он просит студентов дать определение понятий «эволюта» и «эвольвента», записать уравнение эволюты плоской кривой, а также назвать ее основные свойства.

Эволютой называется геометрическое место центров кривизны плоской кривой. Исходная кривая по отношению к эволюте называется эвольвентой.

Из определения «эволюты» следует, что для получения параметрических уравнений эволюты исходной кривой, которая тоже задана параметрически: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, достаточно вспомнить уравнения, дающие координаты x_0 , y_0 центра ее кривизны:

$$x_0 = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}y', \quad y_0 = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}x'. \quad (1)$$

Основные свойства эволюты плоской кривой:

1. Нормаль исходной кривой касается ее эволюты в соответствующем центре кривизны.
2. Приращение длины дуги эволюты на некотором участке кривой по абсолютной величине равно соответствующему приращению радиуса кривизны данной кривой.

Далее преподаватель предлагает студентам, опираясь на второе свойство эволюты, доказать, что параметрические уравнения эвольвенты кривой имеют следующий вид:

$$x = x_0 - \frac{x' \int \sqrt{x'^2 + y'^2} dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad y = y_0 - \frac{y' \int \sqrt{x'^2 + y'^2} dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Доказательство. Пусть кривая BD является эволютой кривой AD (рис. 1).

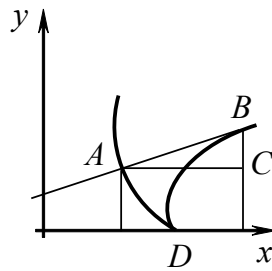


Рис. 1

Обозначим координаты некоторой точки A исходной кривой через $(x_0; y_0)$, а координаты соответствующей ей точки B эволюты через $(x; y)$. Тогда по второму свойству эволюты длина отрезка AB равна длине дуги BD . Из прямоугольного треугольника ABC имеем:

$$BC = AB \cdot \cos \angle ABC; \quad AC = AB \cdot \sin \angle ABC.$$

Отсюда

$$x_0 - x = \overset{\curvearrowright}{BD} \frac{dx}{ds} = \int_a^t \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \cdot \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}; \quad y_0 - y = \overset{\curvearrowright}{BD} \frac{dy}{ds} = \int_a^t \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \cdot \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

что эквивалентно требуемому доказать.

Затем преподаватель говорит о том, что Гюйгенс в указанной работе установил следующий факт: эволютой циклоиды служит конгруэнтная циклоида, точки возврата которой находятся в вершинах исходной циклоиды, и предлагает студентам доказать его справедливость.

Доказательство. Из параметрических уравнений циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (2)$$

по формулам (1) находим параметрические уравнения эволюты:

$$x_0 = a(t + \sin t), \quad y_0 = -a(1 - \cos t). \quad (3)$$

Сходство уравнений (2) и (3) не случайно; если ввести новый параметр t' , который связан с параметром t соотношением $t = t' + \pi$, то уравнения (3) преобразуются к виду:

$$x_0 = \pi a + a(t' - \sin t'), y_0 = -2a + a(1 - \cos t').$$

Таким образом, эволюта циклоиды есть циклоида, конгруэнтная с данной, но смещенная вдоль основания на величину πa , т. е. на половину основания, и опущенная под основание на величину $2a$, т. е. на диаметр производящего круга (рис. 2).

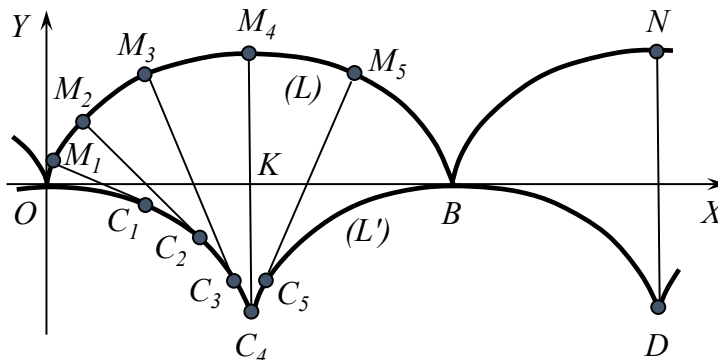


Рис. 2

Это утверждение было использовано Гюйгенсом при конструировании маятниковых часов: чтобы период качания маятника не зависел от его амплитуды, конец маятника должен двигаться по циклоиде, а для этого необходимо верхнюю часть маятника поместить между двумя циклоидальными щеками.

Установленное свойство циклоиды приводит к вопросу о существовании других кривых, обладающих аналогичным свойством. Другими словами, требуется найти кривые, которые имеют n -ю эволюту, подобную исходной кривой.

«Осмысление». Ответ на этот вопрос получил крупнейший математик XVIII в. Леонард Эйлер. Далее студентам предлагается познакомиться с отрывком из работы Эйлера «Исследование кривых, подобных своей эволюте, либо первой, либо второй, либо третьей, либо даже какого угодно порядка» (1787) [4, с. 13—24], которая посвящена этой проблеме.

Пусть дана кривая as (рис. 3).

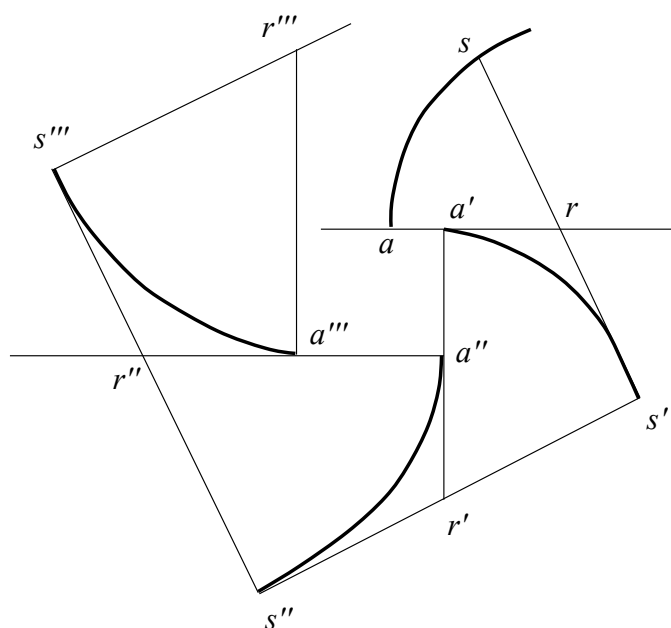


Рис. 3

Построим в точках a и s соответствующие радиусы кривизны aa' и ss' кривой as . Обозначим точку их пересечения через r , а $\angle ars$ через φ . Точки a' и s' будут лежать на первой эволюте $a's'$ кривой as . Из точек a' и s' проведем радиусы кривизны $a'a''$ и $s's''$ кривой $a's'$. Точку их пересечения обозначим r' . По построению $\angle ars = \varphi$, следовательно, кривые as и $a's'$ подобны. Продолжая аналогичные построения, получим следующие кривые: $a''s''$ — эволюта второго порядка кривой as , $a''s''$ — эволюта третьего порядка кривой as и т.д. Все они будут подобны исходной кривой.

Из самой природы эволюты следует, что $ss' = aa' + a's'$.

Аналогично $s's'' = a'a'' + a''s''$, $s''s''' = a''a''' + a'''s'''$ и т.д. (4)

Положив длину кривой $as = s$, радиусы кривизны $ss' = r$, $aa' = a$; длину первой эволюты $a's' = s'$, радиусы кривизны $s's'' = r'$, $a'a'' = a'$; длину второй эволюты $a''s'' = s''$, радиусы кривизны $s''s''' = r''$, $a''a''' = a''$ и т.д., перепишем равенства (4) в следующем виде:

$$r = a + s', r' = a' + s'', r'' = a'' + s''' \text{ и т.д.}$$

Отсюда $s' = r - a$, $s'' = r' - a'$, $s''' = r'' - a''$ и т.д. (5)

Рассмотрим кривую as (рис. 4), соответствующую $\angle ars = \varphi$. Зададим приращение $ds = s\sigma$ и проведем в точке σ радиус кривизны $\sigma\sigma'$.

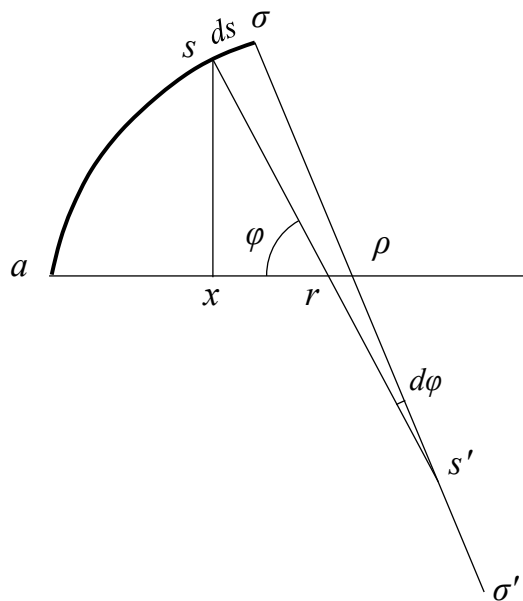


Рис. 4

Обозначим через ρ точку пересечения ar и $\sigma\sigma'$. Из построения следует, что $\angle \rho\sigma = \varphi + d\varphi$, где $d\varphi = \angle rs'\rho$. Из прямоугольного треугольника $s's\sigma$ имеем $d\varphi = \frac{ds}{r}$ и, следовательно, $ds = rd\varphi$.

Аналогично $ds' = r'd\varphi$, $ds'' = r''d\varphi$, $ds''' = r'''d\varphi$ и т.д. (6)

Из равенств (5) получаем, что $ds' = dr$, $ds'' = dr'$, $ds''' = dr''$ и т.д., а отсюда, учитывая равенства (6), имеем $dr = r'd\varphi$, $dr' = r''d\varphi$, $dr'' = r'''d\varphi$ и т.д. или

$$r' = \frac{dr}{d\varphi}, r'' = \frac{d^2r}{d\varphi^2}, r''' = \frac{d^3r}{d\varphi^3}$$

и т.д.

В общем виде длина радиуса кривизны для эволюты n -го порядка будет вычисляться по формуле:

$$r^{(n)} = \frac{d^n r}{d\varphi^n}. \quad (7)$$

По условию задачи эволюта n -го порядка подобна исходной кривой, откуда $r^{(n)} = \pm Cr$, где C — коэффициент подобия. Тогда из равенства (7) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n r}{d\varphi^n} \pm Cr = 0,$$

которое позволяет определить искомую кривую.

Преподаватель предлагает студентам во время чтения делать в тексте следующие пометки: «V» — «это мне было известно», «+» — «это новая информация», «-» — «об этом я думал иначе», «?» — «этот фрагмент остался непонятным или вызвал у меня вопрос». Затем студенты систематизируют свои мысли, заполняя приведенную ниже таблицу. В последней графе «Ход рассуждений» они с опорой на текст восстанавливают последовательность рассуждений, приводящую к решению рассматриваемой проблемы.

V	+	-	?	Ход рассуждений

Эту работу студенты выполняют либо в парах, либо в микрогруппах (4—6 человек), при этом идет обсуждение новой информации, а преподаватель может контролировать промежуточные результаты и оказывать помощь в выполнении задания. Например, студенты должны обосновать справедливость промежуточного равенства $ds = rd\varphi$. (Доказа-

тельство: из треугольника $s's\sigma$ с прямым углом s имеем $\frac{ds}{r} = \operatorname{tg}\Delta\varphi \cong \Delta\varphi = d\varphi$.)

«Рефлексия». После заполнения таблиц преподаватель предоставляет слово каждой из групп. Студенты обмениваются информацией из каждого столбца, дополняют друг друга, а преподаватель фиксирует их ответы в сводной таблице на доске и отвечает на возникшие вопросы. Таким образом, происходит многократное повторение прочитанной информации и восстанавливается полный ход рассуждений великого ученого с обоснованием каждого перехода.

На дом студенты получают следующие задания: для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и параболы $x^2 = 2py$ найти эволюту и эвольвенту; дочитать текст работы Эйлера до конца [4, с. 17—24]; продолжить заполнение таблицы; перечислить кривые, которые подобны своей первой эволюте, своей эволюте второго порядка.

На следующем занятии можно предложить студентам с помощью любого из математических пакетов построить кривые из домашней работы. Кроме того, по результатам выполнения домашнего задания, в том числе отраженным в таблице, преподаватель имеет возможность ответить на возникшие вопросы и оценить работу каждого студента.

Для контроля усвоения пройденного материала студентам предлагается выполнить следующие задания:

1. Дайте определение понятиям «эволюта» и «эвольвента» кривой. Кто впервые ввел эти понятия?
2. Докажите, что радиус кривизны эволюты можно представить выражением:

$$r_1 = \frac{rdr}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(r^2)}{ds}.$$

3. Составьте дифференциальное уравнение кривой, подобной своей эволюте n -го порядка, принимая длину дуги s эвольвенты за функцию от угла φ между ее нормальными.

4. Какое свойство циклоиды было описано в работе Х. Гюйгенса «Маятниковые часы» (1673)?

5. Составьте уравнения эволюты и эвольвенты кривой $y = \sin x$.

Представленная технология работы с научным текстом позволяет обучающемуся освоить такую образовательную стратегию, как методологическая редукция, или реконструкция идей, посредством которых он, изучая ход мыслей создателей классической дифференциальной геометрии, воспроизводит математическую логику мышления, осуществляя тем самым трансфер проблемно-поискового способа научного исследования. Это способствует не только лучшему пониманию студентами изучаемого материала, но и служит подготовительным этапом к их будущей научно-исследовательской работе.

Список использованной литературы

1. Атаханов Р. А. Математическое мышление и методики определения уровня его развития. М. ; Рига, 2000. 208 с.
2. Выготский Л. С. Педагогическая психология. М. : Педагогика, 1991. 480 с.
3. Давыдов В. В. Теория развивающего обучения. М. : ИНТОР, 1996. 544 с.
4. Игнатушина И. В. Материалы для спецкурса «Из истории формирования классической дифференциальной геометрии: применение математического анализа к геометрии в работах Леонарда Эйлера» : учеб.-метод. пособие для студ. физ.-мат. ф-та. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2010. 132 с.
5. Леонтьев А. Н. Избранные психологические произведения : в 2 т. / под ред. В. В. Давыдова, В. П. Зинченко, А. А. Леонтьева, А. В. Петровского. М. : Педагогика, 1983. Т. 1. 392 с.; Т. 2. 320 с.
6. Теплов Б. М. Избранные труды : в 2 т. М. : Педагогика, 1985. Т. 1. 328 с.; Т. 2. 360 с.

Поступила в редакцию 14.02.2016 г.

Игнатушина Инесса Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент
Оренбургский государственный педагогический университет
Российская Федерация, 460014, г. Оренбург, ул. Советская, 19
E-mail: streleec@yandex.ru

UDC 372.8:514.7

I. V. Ignatushina

Centrism of the scientific text and its implementation in differential geometry teaching

The article describes the content and conditions of implementing a new principle of teaching mathematics in high school — the principle of centrism of the scientific text. According to this principle a scientific mathematical text serves as the object of study and is regarded as the most important unit in teaching mathematics. Using the example of one of the classes in differential geometry, the method of working with a scientific text is demonstrated.

Key words: training, differential geometry, principle of centrism of a scientific text.

Ignatushina Inessa Vasilyevna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Orenburg State Pedagogical University
Russian Federation, 460014, Orenburg, ul. Sovetskaya, 19
E-mail: strelecc@yandex.ru

References

1. Atakhanov R. A. *Matematicheskoe myshlenie i metodiki opredeleniya urovnya ego razvitiya* [Mathematical thinking and methodology for determining the level of its development]. Moscow, Riga, 2000. 208 p. (In Russian).
2. Vygotskiy L. S. *Pedagogicheskaya psikhologiya* [Pedagogical psychology]. Moscow, Pedagogika Publ., 1991. 480 p. (In Russian).
3. Davydov V. V. *Teoriya razvivayushchego obucheniya* [The theory of developmental education]. Moscow, INTOR Publ., 1996. 544 p. (In Russian).
4. Ignatushina I. V. *Materialy dlya spetskursa "Iz istorii formirovaniya klassicheskoi differentsial'noi geometrii: primenenie matematicheskogo analiza k geometrii v rabotakh Leonarda Eilera" : ucheb.-metod. posobie dlya stud. fiz.-mat. f-ta* [Materials for the course "The History of formation of the classical differential geometry: application of mathematical analysis to the geometry in the works of Leonhard Euler"]. Orenburg, OGPU Publ., 2010. 132 p. (In Russian).
5. Leontyev A. N. *Izbrannye psikhologicheskie proizvedeniya : v 2 t., pod red. V. V. Davydova, V. P. Zinchenko, A. A. Leontyeva, A. V. Petrovskogo* [Selected psychological works: in 2 vol, ed. by V. V. Davydov, V. P. Zinchenko, A. A. Leontyev, A. V. Petrovsky]. Moscow, Pedagogika Publ., 1983. Vol. 1. 392 p.; Vol. 2. 320 p. (In Russian).
6. Teplov B. M. *Izbrannye trudy : v 2 t.* [Selected works: in 2 vol.]. Moscow, Pedagogika Publ., 1985. Vol. 1. 328 p.; Vol. 2. 360 p. (In Russian).