ВЕСТНИК ОРЕНБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Электронный научный журнал (Online). ISSN 2303-9922. http://www.vestospu.ru

УДК 372.8:514.7 DOI: 10.32516/2303-9922.2021.40.11

И. К. Зубова
И. В. Игнатушина

Историко-научные сведения как одно из средств овладения студентами основными разделами математического анализа

В статье рассмотрен алгоритм включения историко-научных сведений в обучение студентов математическому анализу. В контексте данной работы эти сведения выступают средством овладения обучающимися основными разделами учебной дисциплины. Показаны дидактические и воспитательные аспекты использования сведений по истории математического анализа и представлен практический опыт авторов по использованию историко-научных сведений в обучении студентов математическому анализу. Изложенные конкретные примеры из практики, касающиеся таких разделов, как «Интегральное исчисление», «Теория рядов», «Дифференциальные уравнения», являются результатом многолетнего преподавания этой дисциплины в техническом и педагогическом вузах. Результаты проведенного эксперимента показывают, что использование историко-научных сведений в процессе обучения математическому анализу не только демонстрирует студентам различные стороны развития соответствующего раздела математики, но и облегчает понимание учебного материала, дает возможность познакомиться с лабораторией научного творчества.

Ключевые слова: историко-математические сведения, изучение математического анализа, констатирующий и формирующий эксперименты, эффективность разработанного алгоритма.

Введение

Математический анализ — одна из труднейших и наиболее важных дисциплин в учебном плане любой математической или технической специальности. Студент-первокурсник нередко сталкивается с совершенно новым, непривычным для него подходом даже к самым основным понятиям этой дисциплины. Поэтому при чтении лекций особенно важно постоянно подчеркивать, что в математике нет ничего надуманного, что сама жизнь в ходе развития этой науки ставила перед людьми задачи, решение которых неизбежно приводило к введению новых математических понятий и созданию строгой научной теории [15].

Исторический анализ возникновения той или иной задачи нередко помогает ответить на вопрос о ее происхождении, о значении ее решения. Это, в свою очередь, облегчает восприятие соответствующего учебного материала и позволяет выработать более общий взгляд на изучаемую проблему. Поэтому можно утверждать, что историко-математическая осведомленность должна быть неотъемлемым элементом становления профессиональной культуры современного специалиста [17].

О пользе применения исторических экскурсов в обучении разным разделам математики писали В. В. Бобынин [2], Н. А. Бурова [3], Д. Галанте [50], М. Ф. Гильмуллин [4], Ю. А. Дробышев [5—9], К. Кларк [46], П. Лю [54], И. А. Михайлова [32], А. С. Оздемир [51], А. Панаура [45], Т. С. Полякова [34], Б. Рич [55], Л. Роджерс [36], Дж. Роллинз [56], Ю. В. Романов [37], К. А. Рыбников [38], И. С. Сафуанов [39], Ф. Свец [57], А. Е. Томилова [43], П. С. Уилсон [59], Дж. Фовель [47], М. Н. Фрид [48], Ф. Фурингетти [49], Г. Г. Хамов [44], К. Хараламбус [45], К. Цанакис [46; 58], У. Т. Янквист [52; 53] и др.

© Зубова И. К., Игнатушина И. В., 2021

Вопросы теории и практики обучения математическому анализу в вузе в нашей стране разрабатывали Н. А. Журавлева [10], О. В. Задорожная [11—14], С. И. Калинин [23—27], М. И. Конькова [28], Т. П. Куряченко [30], А. С. Нефедова [33], Е. Н. Рассоха [35], Е. И. Смирнов [40], А. Н. Соколова [41], С. С. Тасмуратова [42] и др.

Авторы, признанные как законодатели в проектировании отечественного курса математического анализа: Николай Николаевич Лузин (1883—1950) — для технических вузов и Григорий Михайлович Фихтенгольц (1888—1959) — для классических университетов, хорошо знакомые с мировыми трендами в обучении математическому анализу [31], не случайно уделяли должное внимание историческим экскурсам в обучении этому разделу математики.

Однако проблема применения историко-научных сведений в процессе обучения студентов математическому анализу изучена недостаточно.

Цель исследования — разработка алгоритма включения истории математики в обучение студентов как средства помощи им в изучении важных разделов математического анализа. Для достижения поставленной цели необходимо решение следующих задач: анализ наиболее успешных практик применения исторических экскурсов при обучении студентов математическому анализу; разработка на основе их синтеза алгоритма включения истории математики при обучении таким разделам, как «Интегральное исчисление», «Теория рядов», «Дифференциальные уравнения»; апробация разработанного алгоритма в образовательном процессе технического и педагогического вузов.

Методы исследования и экспериментальная база

Исследование проводилось в логике: от изучения теоретических проблем применения истории математики в обучении математическому анализу и анализа передового педагогического мирового опыта в этом направлении к разработке инструментов реализации этой технологии в вузе через применение теоретических методов: анализа, синтеза, аналогий, систематизации и классификации материалов, а также эмпирических и рефлексивных методов и приемов. Базой для опытно-экспериментальной работы стали образовательные учреждения г. Оренбурга: ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет» и ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет».

Основная часть

В контексте данной работы под историко-научными сведениями будем понимать сведения о следующих фактах:

1. Момент, когда была поставлена задача, решение которой потребовало выработки новых понятий и методов.

2. Момент, когда такая задача была полностью или частично решена.

3. Публикация научного труда или появление документа (письма, записи в дневнике или записной книжке и т.п.), в котором представлена формулировка, попытка решения или полное решение задачи.

Такие сведения позволяют провести исторический анализ решения важных для дальнейшего развития математики задач и формирования в процессе этого решения базовых понятий математического анализа.

Рассмотрим алгоритм включения истории математики в обучение математическому анализу (рис. 1).

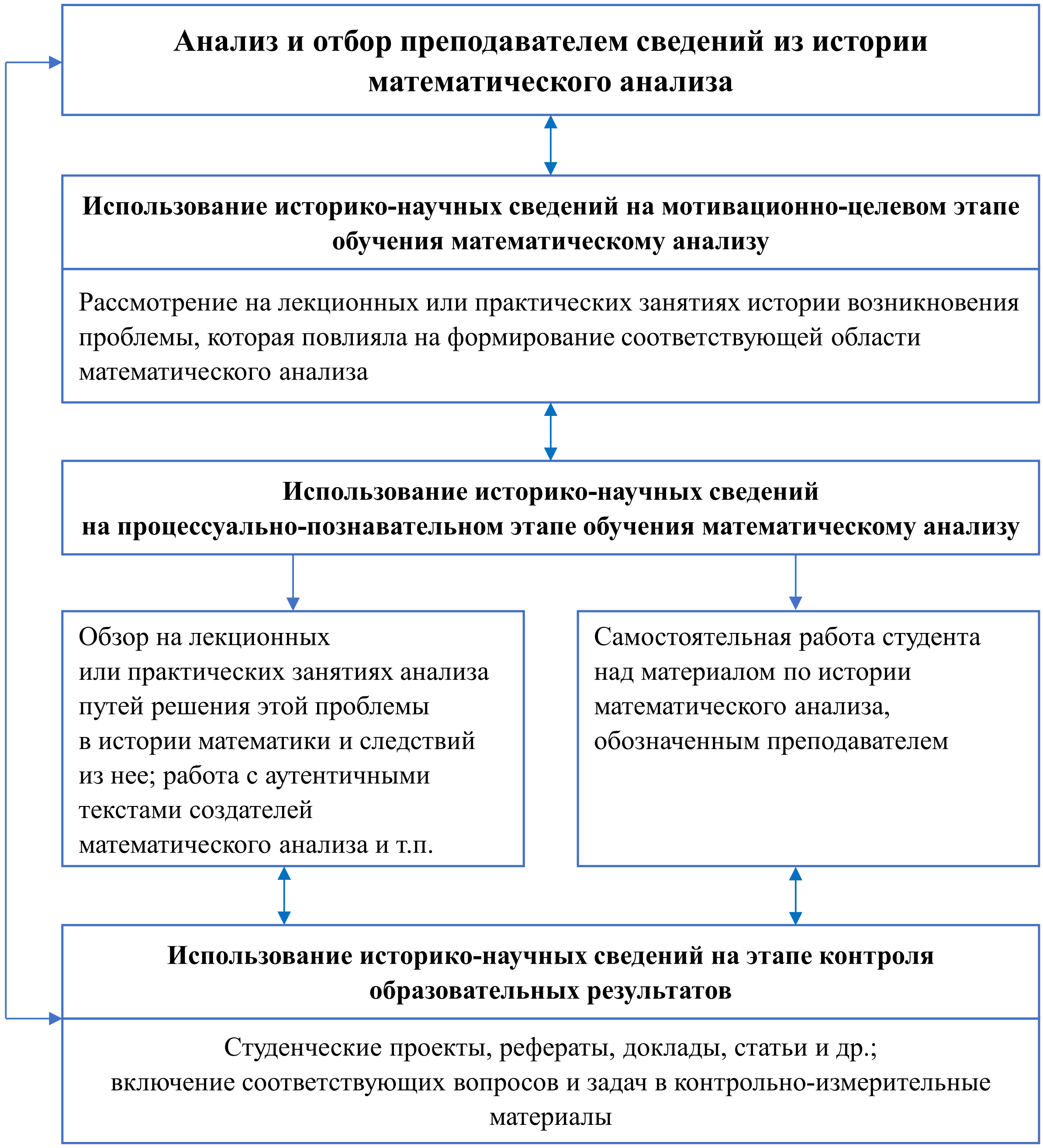

Рис. 1. Алгоритм включения истории математики в обучение математическому анализу

Для детализации данного алгоритма разберем конкретные примеры применения историко-научных сведений как средства помощи студентам в изучении важных разделов математического анализа. Одним из таковых может послужить изложение основ интегрального исчисления.

Познакомить студентов с историей формирования понятия интеграла удобнее всего после изложения тем «Первообразная функция», «Неопределенный интеграл» и «Основные методы интегрирования». Далее мы вводим понятие определенного интеграла. Вводится оно обычно «по Риману», т.е. определяется как предел интегральных сумм. После краткой биографической справки, характеризующей роль Бернхарда Римана (1826—1866) в развитии современной математики, следует отметить, что путь формирования рассматриваемого понятия был долог и непрост. Идея, с которой начинался этот путь, зародилась в трудах Архимеда (ок. 287—212 до н.э.) при отыскании площадей криволинейных фигур и объемов некоторых тел вращения. Результаты исследований ученого были изложены в обычной для греческой математики геометрической форме. Отыскивая, например, площадь параболического сегмента, Архимед разбивал высоту фигуры на большое, но конечное число отрезков очень малой, но конечной длины. Эти отрезки становились высотами прямоугольников, из которых составлялись ступенчатые фигуры, содержащиеся в параболическом сегменте и содержащие его. Говоря о геометрическом смысле интегральных сумм, следует отметить, что эти ступенчатые фигуры являются прообразом понятий верхней и нижней интегральных сумм [20].

Метод Архимеда получил развитие в трудах Иоганна Кеплера (1572—1630). С его помощью Кеплер проверял результаты Архимеда, находил площади новых плоских фигур и объемы новых тел вращения. Пытаясь разгадать замысел Архимеда, он представлял любую фигуру (или тело) в виде суммы большого числа малых элементов, затем из этих элементов (в случае надобности деформированных) составлял новую фигуру (тело) с уже известной площадью (объемом). Таким путем он получал искомую площадь данной фигуры или объем данного тела.

Так, например, чтобы найти площадь круга по методу Кеплера, нужно разбить круг на много секторов *Abc* с очень маленькими площадями. Кеплер считает, что площадь каждого такого сектора почти не отличается от площади треугольника с основанием, равным длине дуги сектора, и высотой, равной радиусу круга (рис. 2).

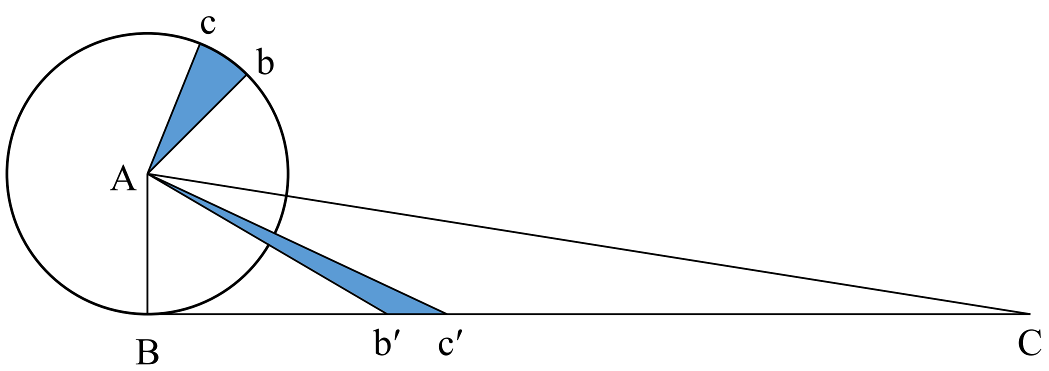

Рис. 2. Определение площади круга по методу Кеплера

Заменив каждый из этих секторов соответствующим треугольником *Ab'c'*, он заключает, что площадь круга равна сумме площадей всех этих треугольников, т.е. площади большого треугольника с катетами, равными соответственно радиусу круга и длине окружности:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

Усовершенствованию метода Кеплера посвятили свои работы многие ученые XVI—XVII вв. Наибольшую известность приобрела теория «неделимых», которую разработал Бонавентура Кавальери (1597—1644). Он ввел термин «неделимое», тем самым приблизившись к понятию бесконечно малого элемента.

Сравнивая между собой «неделимые», т.е. малые элементы различных фигур, и считая, что, например, площади этих фигур находятся в том же отношении друг к другу, что и их «неделимые», Кавальери, зная площади одних фигур, находил площади других. С помощью такого метода Кавальери фактически вычислил интегралы вида $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, где n — положительное число.

Легко видеть сходство рассмотренных методов с современными интегральными методами решения геометрических задач. Однако, хотя в них и присутствовала идея предела, строгого определения этого понятия еще не было. Очень важно подробно проанализировать сходство и различия методов Архимеда, Кеплера и Кавальери с современными интегральными методами. Это будет способствовать более глубокому пониманию сути понятия «определенный интеграл».

Ряд новых результатов при вычислении площадей и объемов в XVII в. получил Пьер Ферма (1602—1675). Введя деление квадрируемой фигуры ординатами, отстоящими друг от друга на равных расстояниях, он разработал новый прием для вычисления площадей криволинейных трапеций, заключенных под кривой вида $y = x^n$, пригодный как для целых, так и для дробных, положительных и отрицательных значений показателя степени, кроме случая $n = -1$. Например, для вычисления площади трапеции, заключенной между параболой и отрезком [0, x] оси абсцисс, Ферма промежуток интегрирования разделил точками, абсциссы которых образовывали бесконечно убывающую геометрическую прогрессию: $x; ax; a^2x; \dots ; a^nx; \dots$, где $a < 1$ (рис. 3).

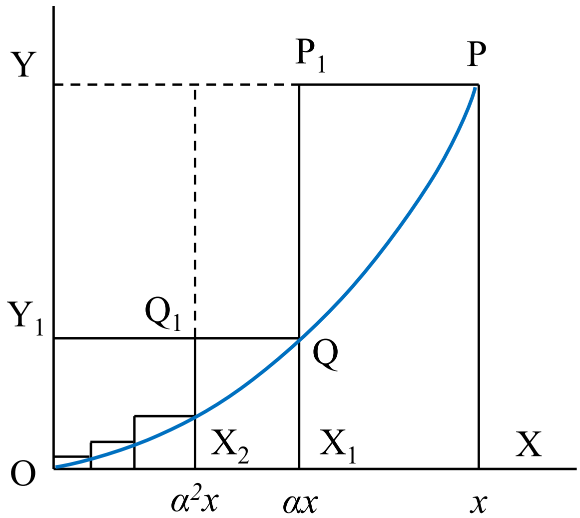

Рис. 3. Вычисление площади криволинейной трапеции по методу Ферма

Далее, пользуясь, как он говорил, специфическим свойством параболы, т.е. в современной терминологии ее уравнением $y = x^2$, Ферма вычисляет площади получившихся прямоугольников:

$$S_{XX_1P_1P} = S_{XOYP} - S_{X_1OYP_1} = x \cdot x^2 - ax \cdot x^2 = x^3(1-a),$$

$$S_{X_1X_2Q_1Q} = S_{X_1OY_1Q} - S_{X_2OY_1Q_1} = ax \cdot (ax)^2 - a^2x \cdot (ax)^2 = a^3x^3(1-a) \text{ и т.д.}$$

Следовательно, площади рассматриваемых прямоугольников образуют бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем a^3, сумма которой равна:

$$x^3(1-a) + a^3x^3(1-a) + a^6x^3(1-a) + \cdots = x^3(1-a)(1+a^3+a^6+\cdots) = \frac{x^3(1-a)}{1-a^3} = \frac{x^3}{1+a+a^2}.$$

Для получения площади фигуры, заключенной под участком параболы, необходимо, чтобы площади криволинейных четырехугольников, на которые будет разбита эта фигура, были почти равными площадям прямоугольников с такими же основаниями. Так будет, когда наибольшее из оснований прямоугольников очень мало и когда $a \to 1$. Отсюда, положив $a = 1$, Ферма получает искомую площадь: $S = \frac{x^3}{1+a+a^2} = \frac{x^3}{3}$. Если снова обратиться к современной терминологии, уже известной студенту, можно сказать, что таким образом Ферма нашел интеграл $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Важнейшее значение для зарождающегося анализа бесконечно малых имели результаты, полученные учителем Ньютона Исааком Барроу (1630—1677). Он установил в терминах геометрии взаимно обратный характер задач на квадратуры и касательные, с точки зрения современного математического анализа — взаимно обратный характер задач интегрального и дифференциального исчисления. Об этом уместно упомянуть, говоря о геометрическом смысле таких понятий, как производная и первообразная функции [21].

Переходя к вычислению определенных интегралов, студенты знакомятся с формулой Ньютона — Лейбница. Здесь стоит остановиться на том, как трактовали понятие определенного интеграла основатели дифференциального и интегрального исчисления.

Во второй половине XVII в. Исаак Ньютон (1643—1727) и Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) независимо друг от друга создали новое исчисление — аппарат зарождающейся математики переменных величин. У Ньютона оно было представлено в форме «теории флюксий» (так у него и его последователей назывались производные), а у Лейбница — в форме «исчисления дифференциалов». О том, что в обоих случаях можно говорить о создании исчисления, свидетельствует то, что оба великих ученых, каждый по-своему, определили основные понятия математики переменных величин (это понятия бесконечно малой величины, функции, производной, дифференциала, первообразной, интеграла), установили их взаимосвязь, ввели подходящую символику и разработали алгоритм вычислений. Уместно разъяснить студентам, что в современной математике термин «исчисление» означает аппарат, применяющийся в какой-либо области математики. Исчисление сформировано, когда введены основные понятия, определяющие некоторую совокупность математических моделей, правила действий с этими моделями, терминология и символика.

При интегрировании И. Ньютон использовал взаимно обратную связь между нахождением флюксий (производных) и флюент (функций). Важную роль при этом играло представление интегрируемой функции степенным рядом. Такое представление позволило Ньютону проинтегрировать многие иррациональные и трансцендентные функции.

Г. В. Лейбниц трактовал определенный интеграл как сумму бесконечного числа бесконечно малых элементов, которые называл дифференциалами. Обозначал он такой интеграл первоначально как «*omnl*» (omnia — все, *l* — линия, т.е. «все линии»), но вскоре ввел знак ∫, который представлял собой удлиненную, до неузнаваемости вытянутую вверх букву S, первую букву слова summa — «сумма». Сам термин «интеграл» ввел в обиход один из первых последователей Лейбница — Иоганн Бернулли (1667—1748).

Вычисление интегралов Лейбниц, как и Ньютон, сводил к отысканию первообразной. Постоянная интегрирования появилась в статье Лейбница в 1694 г. Для вычисления интегралов с определенными пределами интегрирования Ньютон и Лейбниц, каждый с помощью своей символики, использовали формулу, которая носит теперь их имена. Интеграл Ньютона — Лейбница равен разности значений первообразной в точках, являющихся верхним и нижним пределами интегрирования.

Огромный вклад в развитие интегрального исчисления внес Леонард Эйлер (1707—1783). Почти все приемы интегрирования, излагаемые в современных учебниках, можно найти в его трехтомном «Интегральном исчислении». Кроме того, Эйлер существенно развил теорию определенных интегралов, для обозначения которых он ввел специальный знак $\int Pdx \begin{bmatrix} \text{от } x = a \\ \text{до } x = b \end{bmatrix}$. Сам термин «определенный интеграл» предложил в 1779 г. Пьер Симон Лаплас (1749—1827), а современное обозначение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ ввел в 1817 г. Жан-Батист Фурье (1768—1830).

В заключение такого экскурса в историю следует подчеркнуть, что введение в XIX веке строгого определения предела позволило дать современную формулировку понятия определенного интеграла. Здесь можно в очередной раз упомянуть о деятельности Огюстена Луи Коши (1789—1857), о том, что в современном курсе математического анализа понятие предела вводится именно «по Коши», а все остальные важные понятия курса, в том числе и определенного интеграла, базируются именно на этом определении.

В качестве другого примера исторического подхода к важному понятию математического анализа рассмотрим тему «Ряды». Теория рядов является достаточно сложным разделом математического анализа. Изучение этой темы начинается с введения следующих понятий: числовой ряд, его частичная сумма, сходимость и сумма ряда. Затем рассматривается определение функционального ряда и основные понятия, связанные с ним. В качестве важных примеров функциональных рядов студенты знакомятся со степенными и тригонометрическими рядами и условиями разложимости функций в ряды.

Такой порядок изложения, разумеется, не только оправдан, но и единственно возможен. Изучить любую математическую теорию можно только таким образом, начиная с введения элементарных понятий и постепенно овладевая более сложными, знакомясь с задачами, при решении которых используются методы, базирующиеся на этих понятиях. Однако исторический путь формирования научных теорий обычно начинается, наоборот, с задач, возникших из практики, с новых вопросов, требующих от ученого разработки нового научного аппарата для их решения. В истории математики сплошь и рядом встречаются примеры того, как результат догадки одного гениального ученого бывает строго обоснован усилиями многих других, иногда спустя очень долгий период.

Это соображение должно, на наш взгляд, упростить для слушателя подход ко многим сложным вопросам. Поэтому представляется целесообразным при переходе к новому разделу курса начинать не с введения новых определений, а с исторического обзора задач, для решения которых нужны понятия и методы, рассматриваемые в этом разделе.

Такой обзор перед началом изучения теории рядов можно начать с рассказа о первом представлении функции многочленом, которое обнаружено в 1676 г. в письме И. Ньютона к секретарю Лондонского королевского общества, т.е. с формулы бинома Ньютона. Выпишем эту формулу, представляющую многочленом функцию $(1 + x)^n$, где n — натуральное число. Затем предположим, что показатель степени не является натуральным, и тогда получим выражение этой функции биномиальным рядом, т.е. многочленом с бесконечным числом слагаемых:

Электронный научный журнал (Online). ISSN 2303-9922. http://www.vestospu.ru

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

Эта идея получила развитие в труде одного из последователей Ньютона английского математика Брука Тейлора (1685—1731). В 1715 г. им было показано, что всякой функции, которая имеет в точке x_0 производные любого порядка, может быть поставлен в соответствие ряд:

$$f(x) \to f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

Если бы между функцией $f(x)$, принимающей конечное значение для любого значения x_0, и функциональным рядом, стоящим справа, стоял бы знак равенства, получилась бы формула, которая в любом курсе математического анализа называется формулой Тейлора. Однако сразу поставить этот знак нельзя. Это связано с бесконечностью числа слагаемых в правой части выражения. Поэтому, чтобы заменить знак $\to$ на знак =, необходимо провести дополнительный анализ, который позволит найти множество тех значений x, при которых остаток ряда будет стремиться к нулю.

Частный случай формулы Тейлора, когда $x_0 = 0$, носит имя Колина Маклорена (1698—1746), который, как и Тейлор, был убежденным последователем Ньютона. В 1742 г. в своем труде «Трактат о флюксиях» Маклорен показал, что представить аналитическую функцию степенным рядом можно единственным способом: это будет ряд Тейлора, порожденный этой функцией. Мы обращаем особое внимание слушателей на то, что и в формуле бинома Ньютона коэффициенты при степенях x представляют собой именно значения $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, где $f(x) = (1+x)^m$, а n изменяется от 0 до m.

Итак, делаем вывод: возникновение степенных рядов — результат попыток представить в наиболее удобном виде функцию, имеющую n производных. И для нас естественно, что эта функция в промежутке сходимости представляющего ее ряда является суммой этого ряда. Определение суммы ряда при этом уже введено, и, согласно этому определению, сумма сходящегося ряда — это предел последовательности его частичных сумм. Стоит, однако, заметить, что и к понятию суммы сначала числового, а затем и функционального ряда математики шли достаточно долго.

Понятия суммы, сходимости, расходимости ряда формировались на протяжении всего XVIII и первой половины XIX века [19]. После появления определения предела «по Коши» возникает определение суммы ряда как предела последовательности его частичных сумм, критерий Коши сходимости ряда, выводится необходимый признак сходимости ряда. Обо всем этом и следует рассказать, вводя понятие сходимости ряда, до обзора достаточных признаков сходимости рядов с положительными членами.

В качестве еще одного примера применения исторического материала при изучении теории рядов рассмотрим вопрос «Интегральный признак Маклорена — Коши сходимости числового ряда с положительными членами».

Пусть члены ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

положительны и не возрастают, и пусть $f(x)$ — функция, которая:

1) определена и непрерывна для $\forall x \in [1; +\infty)$;

2) положительна на промежутке $[1; +\infty)$;

3) не возрастает на этом промежутке;

4) $f(1) = u_1$; $f(2) = u_2$; $f(3) = u_3$; … $f(n) = u_n$; …

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд (1).

2) если такой несобственный интеграл расходится, то расходится и ряд (1).

Доказательство этой теоремы во многих современных учебниках опирается на геометрическую интерпретацию несобственного интеграла, а именно: будем рассматривать несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ как площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и горизонтальной осью. Эта фигура бесконечно простирается вправо. Члены ряда (1) будем рассматривать как ординаты точек, абсциссы которых $x = 1, 2, 3, \ldots, n$. Тогда члены этого ряда будут одновременно равны площадям прямоугольников, основания которых равны единице, а высоты — указанным ординатам. Таким образом, сумму ряда (1) геометрически будем трактовать как площадь ступенчатой фигуры, состоящей из таких прямоугольников. Эта фигура заключает в себе криволинейную фигуру, ограниченную графиком функции $f(x)$ и осью абсцисс (рис. 4). Сумма площадей таких прямоугольников только первым своим слагаемым отличается от суммы площадей прямоугольников, входящих в данную фигуру, т.е. от площади ступенчатой фигуры, содержащейся в криволинейной. Понятно, что в случае, когда площадь указанной криволинейной фигуры конечна, т.е. когда рассматриваемый несобственный интеграл сходится, конечной будет и площадь «внутренней» ступенчатой фигуры, а это означает, что ряд (1) сходится. Когда же площадь криволинейной фигуры бесконечна, т.е. когда несобственный интеграл расходится, площадь ступенчатой фигуры, содержащей в себе криволинейную, также будет бесконечной, и это будет означать, что ряд (1) расходится.

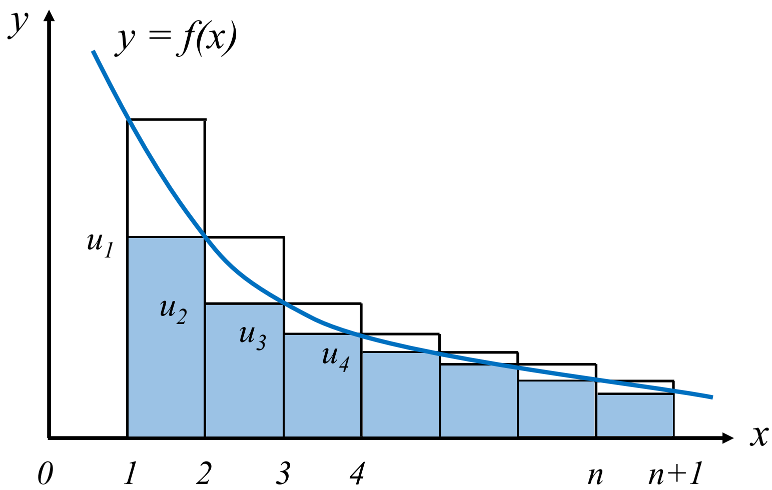

Рис. 4. Геометрическая интерпретация ряда (1)

Именно в геометрической форме этот признак был впервые представлен К. Маклореном в XVII в., но затем он был забыт и только в XIX в. вновь переоткрыт О. Л. Коши и сформулирован в аналитической форме. Здесь можно еще раз подчеркнуть, что многие основные идеи классического анализа возникли в XVII—XVIII вв., а в первой половине XIX в., после введения строгого определения понятия предела на языке ε—δ, эти идеи получили свое обоснование [18].

Электронный научный журнал (Online). ISSN 2303-9922. http://www.vestospu.ru

Изучение числовых рядов необходимо прежде всего для последующего исследования функциональных рядов, которые, в свою очередь, нужны для представления функций. В курсе математического анализа рассматриваются два вида функциональных рядов, наиболее часто применяющиеся в механике и различных разделах физики. Это степенные и тригонометрические ряды.

Обращаясь к истории возникновения тригонометрических рядов, следует заметить, что во второй половине XVIII в. началось интенсивное развитие математики, близкой к современной, благодаря чему такие понятия, как функция, дифференциальное уравнение, ряд и другие стали приобретать тот смысл, который в них вкладывается в наши дни. Именно в этот период активно выстраивались как геометрическая, так и аналитическая модели всего наблюдающегося в природе и технике и формировалось предпочтительное отношение к аналитической модели, которая позволяет обобщать данные, полученные средствами геометрии для частного случая.

Одним из научных достижений Б. Тейлора является вывод уравнения малых колебаний струны с закрепленными концами. Современный вид этого уравнения таков:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \qquad (2)$$

Именно с этого дифференциального уравнения второго порядка с частными производными начала свое развитие математическая физика. Значение этой задачи для истории науки, ее роль в развитии многих математических теорий должны быть хотя бы в общих чертах известны студентам любой математической или технической специальности.

Сформулируем задачу геометрически: пусть колебания струны происходят только в плоскости XOY. Пусть при этом всякая точка рассматриваемой струны движется в направлении, перпендикулярном горизонтальной оси (оси OX). Обозначим через $y = y(x,t)$ величину отклонения точки струны с абсциссой x в данный момент времени t. График этой функции при фиксированном значении $t = t_0$ изображает форму струны в данный момент времени. Длина струны l считается неизменной, поскольку рассматриваются только малые ее колебания. Требуется найти отклонение каждой точки струны в любой момент времени t, если известны форма струны и скорость движения ее точек в начальный момент времени $t = 0$.

Аналитическая формулировка этой задачи такова: решить уравнение (2) при граничных условиях $y = y(0,t) = y(l,t) = 0$ и начальных условиях $\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = g(x)$, $y(x,0) = f(x)$, если функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы, непрерывны и обращаются в нуль при $x = 0$ и $x = l$.

Тейлор, конечно, использовал другие обозначения, излагая вывод и решение уравнения, которое мы знаем в виде (2). Он получил частное решение этого уравнения в виде функции, которую в наше время записывают следующим образом: $y = Asin(\omega x + \varphi)$ — и называют гармоникой. $|A|$ — амплитуда гармоники, ω — ее частота, φ — начальная фаза. Эти величины постоянные, причем ω связана со струной, а A и φ — произвольны. Период этой функции $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Далее следует разъяснить, что понятие гармоники появилось в ходе решения задачи механики о простейшем колебательном движении — гармоническом, что всякую гармонику можно представить в виде $a\cos\omega x + b\sin\omega x$, и, наоборот, любая функция этого вида представляет собой гармонику.

Пусть $T = 2l$, тогда $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}$. Отсюда гармоника с периодом $T = 2l$ может быть записана так: $a cos\frac{\pi x}{l} + b sin\frac{\pi x}{l}$.

Рассмотрим гармоники вида

$$a_k cos\frac{\pi kx}{l} + b_k sin\frac{\pi kx}{l}, k=1, 2, \ldots \quad (3)$$

Частоты этих гармоник равны $\omega_k = \frac{\pi k}{l}$, а периоды — $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2l}{k}$. Поскольку $T = 2l = kT_k$, число $T = 2l$ будет периодом для всех гармоник вида (3), так как, умножив период на целое число, мы вновь получим период.

Пусть имеется бесконечный ряд, составленный из тригонометрических (то есть, разумеется, периодических) функций

$$A + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\frac{\pi kx}{l} + b_k sin\frac{\pi kx}{l}. \quad (4)$$

Предположим, что этот ряд сходится. Тогда его сумма также будет периодической функцией с тем же периодом ($2l$). Каждую гармонику рассматриваем как простое гармоническое колебание, тогда сумму ряда (4) можно будет использовать в качестве характеристики сложного колебательного движения. Другими словами, мы получим представление этого колебательного движения в виде суммы простых гармонических колебаний. К этому выводу пришли математики XVIII в. Величайший из них — Леонард Эйлер — посвятил задаче о колебании струны пятнадцать работ. В одной из них, в 1748 г., он получил решение частного случая уравнения (2) в виде тригонометрического ряда [16]. В 1753 г. Даниилу Бернулли (1700—1789) удалось получить уже общее решение уравнения (2). Он предложил это решение также в виде бесконечной суммы тригонометрических функций, основываясь на том, что колеблющаяся струна издает звук, который разлагается на основной тон и бесконечное множество обертонов. Такая форма выражения функции вызвала возражения Эйлера, так как представлялась ему недостаточно общей. Какие же именно функции представимы тригонометрическими рядами? Ответить на этот вопрос удалось только ученым XIX в., и первым из них следует назвать имя Ж. Б. Фурье.

Изложив вкратце историю спора о природе функций, входящих в общее решение уравнения колебаний струны, показав, как появилась идея представления этой функции тригонометрическим рядом, можно перейти к обсуждению результатов, полученных Фурье. Кратко осветив яркую биографию этого французского ученого, в частности его большую роль в развитии математической физики, отметим работы по аналитической теории тепла. Работая над этой теорией, Фурье в 1807 г. пришел к выводу, что функции, заданные на конечных участках отрезка $[-l, l]$ различными уравнениями, могут на любом таком отрезке быть представлены рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\, cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\, sin\frac{\pi nx}{l}\right) \quad (5)$$

с коэффициентами

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)cos\frac{\pi nx}{l}dx, \; n = 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sin\frac{\pi nx}{l}dx, n = 1, 2, \ldots .$$

Главной заслугой Фурье и был вывод формул для этих коэффициентов, поэтому ряд (5) получил его имя. Г. М. Фихтенгольц называл этот вывод результатом гениального легкомыслия, так как вопрос об общих свойствах функции, допускающей разложение в такой ряд, Фурье «отложил». Вопрос этот был окончательно решен П. Г. Леженом-Дирихле (1805—1859), который доказал возможность разложения в ряд Фурье всякой кусочно-непрерывной и монотонной функции [22].

Предлагаемый исторический обзор может быть сделан в заключительной лекции по разделу «Ряды» или же во вступлении к подразделу «Ряды Фурье» и в ходе изложения обязательного материала. В любом случае, познакомив с ним студентов, мы добиваемся лучшего восприятия темы «Функциональные ряды», понимания места и роли этой темы в курсе математического анализа.

Опытно-экспериментальная работа по внедрению исторических экскурсов в обучение студентов как средства помощи им в изучении важных разделов математического анализа была организована на базе физико-математического факультета ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет» и факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет». Она проводилась в три этапа:

1. Поисково-констатирующий этап эксперимента (2004—2010).
2. Формирующий этап эксперимента (2010—2020).
3. Обобщающий этап эксперимента (2020—2021).

На первом этапе изучалась соответствующая психолого-педагогическая и методическая литература; анализировались учебные планы и программы вузов по математическому анализу; проводились беседы со студентами и преподавателями по интересующей проблеме; велось наблюдение за работой студентов на лекциях и практических занятиях по математическому анализу; проводились анкетирование и анализ среза знаний обучающихся, включающего серию контрольных работ и математические диктанты по основным разделам математического анализа; определялись возможности использования истории математики в обучении студентов как средства помощи им в изучении важных разделов математического анализа; разрабатывался алгоритм включения историко-научных сведений при изучении разделов «Интегральное исчисление», «Теория рядов», «Дифференциальные уравнения».

На этом этапе эксперимента в нем принимали участие студенты 14 академических групп общей численностью 285 человек. Результаты выполненных ими контрольных работ и математических диктантов по основным разделам математического анализа позволили определить в каждой группе коэффициент полноты усвоения учебного материала (КУУМ), рассчитываемый по формуле В. П. Беспалько: $k = \frac{n}{N}$, где n — количество баллов, набранных участниками эксперимента, N — максимально возможное количество баллов [1]; и коэффициент системности знаний (КСЗ), определяемый по формуле Н. Е. Кузнецовой: $\overline{K} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{m \cdot n}$, где l_i — число признаков или связей, указанных респондентами, n — максимальное число признаков, m — общее количество проанализированных ответов [29]. Результаты представлены в таблице 1.

На основании этих результатов можно заключить, что знания студентов по математическому анализу формальны, респонденты слабо представляют связь между его основными разделами, а также области его применения. При этом большинство из них положительно настроены на изучение материала по истории математического анализа.

Электронный научный журнал (Online). ISSN 2303-9922. http://www.vestospu.ru

Таблица 1

Результаты поисково-констатирующего этапа эксперимента

Год	Кол-во респондентов	КУУМ	КСЗ
2004	22*	0,63	0,55
	21*	0,61	0,52
2005	21	0,60	0,51
	20	0,62	0,52
2006	20	0,60	0,53
	22	0,59	0,53
2007	17	0,60	0,54
	19	0,58	0,55
2008	20	0,61	0,55
	20	0,60	0,53
2009	21	0,63	0,55
	23	0,63	0,54
2010	19	0,65	0,56
	20	0,62	0,53

* Здесь и в таблице 2 по каждому году указано сверху — количество респондентов и их результаты из ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет», снизу — из ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет».

На втором, формирующем, этапе эксперимента разработанный алгоритм включения историко-научных сведений при изучении разделов математического анализа был апробирован на физико-математическом факультете ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет» и на факультете математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет».

В результате студенты познакомились с причинами появления основных разделов математического анализа, математической лабораторией его создателей, а также приложениями математического анализа, что помогло им определить место математического анализа в науке в целом, взглянуть на него более масштабно, осознать большое практическое значение.

С участниками этого этапа эксперимента (412 студентов из 20 академических групп) также было проведено анкетирование. Им было предложено выполнить ту же серию контрольных работ и математических диктантов, что и участникам первого этапа эксперимента. Полученные коэффициенты усвоения учебного материала и системности знаний представлены в таблице 2.

Эффективность разработанного алгоритма включения историко-научных сведений при изучении разделов математического анализа проверялась на третьем, обобщающем, этапе эксперимента. Для сопоставления результатов контрольной группы, указанных в таблице 1, с результатами экспериментальной группы, представленными в таблице 2, использовался U-критерий Манна — Уитни.

Поскольку расчетные значения критерия ($U_{\text{эмп для КУУМ}} = 7$, $U_{\text{эмп для КСЗ}} = 2$) оказались значительно меньше критического на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ ($U_{0{,}05} = 92$), то наблюдаемое различие значений коэффициента усвоения учебного материала (коэффициента системности знаний) для контрольной и экспериментальной групп статистически значимо. При этом результаты у экспериментальной группы выше.

Таблица 2

Результаты формирующего этапа эксперимента

Год	Кол-во респондентов	КУУМ	КСЗ
2011	20	0,66	0,59
	21	0,65	0,57
2012	21	0,64	0,58
	22	0,72	0,67
2013	18	0,64	0,61
	21	0,69	0,69
2014	21	0,68	0,66
	23	0,63	0,56
2015	20	0,69	0,68
	20	0,72	0,69
2016	23	0,67	0,70
	24	0,68	0,71
2017	18	0,73	0,71
	21	0,74	0,72
2018	21	0,72	0,70
	22	0,75	0,76
2019	17	0,81	0,80
	20	0,82	0,81
2020	20	0,80	0,79
	19	0,78	0,80

Следовательно, использование исторических экскурсов при обучении студентов математическому анализу позитивно влияет на повышение коэффициентов усвоения учебного материала и системности знаний по данной дисциплине.

Заключение

Таким образом, использование историко-научного материала как на лекциях, так и на практических занятиях по математическому анализу помогает студенту связать воедино все известные ему сведения об основных понятиях различных разделов дисциплины, сделать представления об этих понятиях более четкими и ясными. Результаты проведенного эксперимента показывают, что, используя историко-научные факты в процессе обучения математическому анализу, преподаватель не только демонстрирует перед студентами различные стороны развития соответствующего раздела математики, но и облегчает понимание учебного материала, дает возможность познакомиться с лабораторией научного творчества, сформировать у обучающихся нравственные идеалы на основе персоналистической составляющей истории математики. Для преподавателей «исторический фон доставляет идеи и сведения, на которых мы можем основывать наши подходы к преподаванию» [36].

Список использованной литературы

1. Беспалько В. П. Слагаемые педагогической технологии. М. : Педагогика, 1989. 192 с.
2. Бобынин В. В. Философское, научное и педагогическое значение истории математики. М. : Издание редакции журнала «Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем», 1886. 40 с.
3. Бурова Н. А. Курс истории математики как фактор гуманизации и гуманитаризации математического образования в педагогическом вузе : дис. … канд. пед. наук. Новосибирск, 2000. 196 с.
4. Гильмуллин М. Ф. Формирование исторического компонента математико-методической культуры студентов при обучении истории математики в педагогическом вузе : дис. … канд. пед. наук. Ярославль, 2009. 230 с.

5. Дробышев Ю. А. Формирование готовности бакалавров — будущих учителей математики к реализации раздела «Математика в историческом развитии» // Continuum. Математика. Информатика. Образование. Елец, 2018. № 4 (12). С. 53—58.

6. Дробышев Ю. А. Многоуровневая историко-математическая подготовка будущего учителя математики : дис. … д-ра пед. наук. М., 2011. 452 с.

7. Дробышев Ю. А., Дробышева И. В. Историко-математическая реконструкция как средство эффективного обучения математике // Математическое моделирование в экономике, управлении и образовании : сб. науч. статей по материалам III Междунар. науч.-практ. конф. Калуга, 2017. С. 147—150.

8. Дробышев Ю. А., Дробышева И. В. Биографии математиков: чему они учат студентов // Калужский экономический вестник. 2020. № 4. С. 63—65.

9. Дробышев Ю. А., Дробышева И. В., Тарас О. Б. Воспитание личностных качеств студентов : материалы персоналистического компонента истории математики. М., 2017. 288 с.

10. Журавлева Н. А. Формирование базовых ключевых компетенций студентов — будущих учителей математики — в процессе обучения математическому анализу : дис. … канд. пед. наук. Красноярск, 2012. 213 с.

11. Задорожная О. В. Метод проектов в обучении математическому анализу // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 3 (3). С. 41—46.

12. Задорожная О. В. Учебно-научный проект как способ углубления и расширения знаний по математическому анализу // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2017. № 1 (45). С. 160—166.

13. Задорожная О. В. Основы проектной деятельности на занятиях по математическому анализу [Электронный ресурс] // Ученые записки. Электронный журнал Курского государственного университета. 2016. № 3 (39). URL: https://api-mag.kursksu.ru/api/v1/get_pdf/1974/

14. Задорожная О. В. Проектирование комплекса учебных проектов в процессе обучения математическому анализу в университете : дис. … канд. пед. наук. Нижний Новгород, 2011. 237 с.

15. Зубова И. К. Об использовании некоторых историко-научных сведений в курсах высшей математики для студентов технических специальностей // История и методология науки : межвуз. сб. науч. тр. Пермь : Изд-во Пермского ун-та, 2002. Вып. 9. С. 85—90.

16. Зубова И. К. Задача о колебании струны в трудах Л. Эйлера // Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера (1707—1783). Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2000. Вып. 1. С. 39—49.

17. Зубова И. К., Игнатушина И. В. О применении историко-научного материала при изложении курса математического анализа в техническом университете // Формирование профессиональной культуры специалистов XXI века в техническом университете : тр. 6-й междунар. науч.-практ. конф. СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2006. С. 156—165.

18. Зубова И. К., Игнатушина И. В. Ряды. Обзор теории и истории ее формирования : учеб.-метод. пособие. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2005. 59 с.

19. Зубова И. К., Острая О. В. Применение элементов истории математики при изложении темы «Формула Тейлора» в курсе математического анализа // Труды X Международных Колмогоровских чтений : сб. статей. Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2012. С. 233—236.

20. Игнатушина И. В. О применении исторического материала на практических занятиях по высшей математике при изучении интегрального исчисления // Формирование профессиональной культуры специалистов XXI века в техническом университете : тр. 4-й междунар. науч.-практ. конф. СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2004. С. 254—256.

21. Игнатушина И. В. О предыстории дифференциального и интегрального исчисления // История и философия науки : сб. науч. ст. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2005. Вып. 5. С. 152—165.

22. Игнатушина И. В. Об истории развития понятия функции (задача о колебании струны) // Вестник Оренбургского государственного педагогического университета. 2000. № 5 (20). С. 24—31.

23. Калинин С. И. Методическая система обучения студентов педвуза дифференциальному и интегральному исчислению функций в контексте фундаментализации образования : дис. … д-ра пед. наук. М., 2010. 318 с.

24. Калинин С. И. Обучение студентов математическому анализу в условиях фундаментализации высшего педагогического образования. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2008. 353 с.

25. Калинин С. И. О предмете математического анализа // Информатика. Математика. Язык : науч. журн. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2008. Вып. 5. С. 170—174.

26. Калинин С. И. О принципах отбора содержания обучения математическому анализу студентов математических специальностей // Математика. Образование : материалы XV Междунар. конф. Чебоксары : Изд-во Чуваш. ун-та, 2007. С. 66.

27. Калинин С. И. Эвристики в содержании обучения студентов математических специальностей дифференциальному и интегральному исчислению // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2008. № 2 (1). С. 126—134.

28. Конькова М. И. Обучение основам дифференциального исчисления студентов технических направлений подготовки с опорой на образные представления : дис. … канд. пед. наук. Орел, 2013. 183 с.

29. Кузнецова Н. Е. Формирование системы понятий при обучении химии. М. : Просвещение, 1989. 145 с.

30. Куряченко Т. П. Формирование приемов поисково-исследовательской деятельности будущих учителей математики в процессе обучения математическому анализу : дис. … канд. пед. наук. Омск, 2006. 234 с.

31. Мельников Р. А., Саввина О. А. У истоков преподавания математического анализа в России: обзор переводов европейских авторов // Психология образования в поликультурном пространстве. Елец, 2014. № 3 (27). С. 116—124.

32. Михайлова И. А. Технология историзации школьного математического образования : дис. … канд. пед. наук. Ростов-на-Дону, 2005. 257 с.

33. Нефедова А. С. Развитие информационной компетентности студентов заочных отделений педагогических вузов в процессе обучения математическому анализу : дис. … канд. пед. наук. Екатеринбург, 2011. 217 с.

34. Полякова Т. С. Историко-методическая подготовка учителей математики в педагогическом университете : дис. … д-ра пед. наук. Ростов-на-Дону, 1998. 457 с.

35. Рассоха Е. Н. О теоретизации втузовских учебников по математическому анализу // Вестник Оренбургского государственного университета. 2011. № 10 (129). С. 272—276.

36. Роджерс Л. Историческая реконструкция математического знания // Математическое образование. М., 2001. № 16. С. 74—85.

37. Романов Ю. В. Теория и методика историзации геометрической подготовки учителя математики в педагогическом вузе : дис. … канд. пед. наук. Ростов-на-Дону, 2002. 240 с.

38. Рыбников К. А. Об историко-методологических основах математического образования учителей // Математика в школе. 1981. № 5. С. 31—33; 1982. № 3. С. 48—49.

39. Сафуанов И. С. Генетический подход к обучению математическим дисциплинам в высшей педагогической школе : автореф. дис. … д-ра пед. наук. М., 2000. 39 с.

40. Смирнов Е. И., Шабалина А. И. Принцип вариативности в проектировании спиралей фундирования знаний по математическому анализу // Труды VII Международных Колмогоровских чтений : сб. статей. Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2009. С. 306—318.

41. Соколова А. Н. Методика использования компьютерного эксперимента в процессе преподавания математического анализа в условиях модульной системы обучения : дис. … канд. пед. наук. М., 2012. 153 с.

42. Тасмуратова С. С. Методические основы интенсификации обучения по курсу математического анализа в педвузе : дис. … канд. пед. наук. М., 1997. 174 с.

43. Томилова А. Е. Методика отбора содержания курса истории математики и его реализации в педагогическом вузе : дис. … канд. пед. наук. Архангельск, 1998. 230 с.

44. Хамов Г. Г. Элементы историзма в спецдисциплинах и их роль в профессиональной подготовке будущего учителя математики // История науки в вузе и в школе : сб. науч. тр. Мурманск : МГПИ, 1996. Вып. 3. С. 9—13.

45. Charalambous C., Panaoura A., Phillippou G. Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: Insights form evaluating a teacher education program // Educational Studies in Mathematics. 2009. Vol. 71, N 2. P. 161—180. DOI: 10.1007/s10649-008-9170-0.

46. Clark K., Kjeldsen T., Schorcht S., Tzanakis C., Wang X. History of mathematics in mathematics education. Recent developments // History and Pedagogy of Mathematics. 2016. Jul. hal-01349230. URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01349230.

47. Fauvel J. Using history in mathematics education // For the Learning of Mathematics. 1991. Vol. 11, N 2. P. 3—6.

48. Fried M. N. Can mathematics education and history of mathematics coexist? // Science and Education. 2001. N 10. P. 391—408.

49. Furinghetti F. Teacher education through the history of mathematics // Educational Studies in Mathematics. 2007. Vol. 66, N 2. P. 131—143. DOI: 10.1007/s10649-006-9070-0.

50. Galante D. The use of the history of mathematics in the teaching pre-service mathematics teachers // REDIMAT. 2014. Vol. 3, N 2. P. 110—120.

51. Goktepe1 S., Ozdemir A. S. An example of using history of mathematics in classes // European Journal of Science and Mathematics Education. 2013. Vol. 1, N 3. P. 125—136.

52. Jankvist U. T. An empirical study of using history as a ‘goal’ // Educational Studies in Mathematics. 2010. Vol. 74, N 1. P. 53—74. DOI: 10.1007/s10649-009-9227-8.

53. Jankvist U. T. A categorization of the ‘whys’ and ‘hows’ of using history in mathematics education // Educational Studies in Mathematics. 2009. Vol. 71, N 3. P. 235—261.

54. Liu P. Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? // Mathematics Teacher. 2003. Vol. 96, N 6. P. 416—421.

55. Marshall G., Rich B. The role of history in a mathematics class // Mathematics Teacher. 2000. Vol. 93, N 8. P. 704—706.

56. McBride C. C., Rollins J. H. The Effects of History of Mathematics on Attitudes toward Mathematics of College Algebra Students // Journal for Research in Mathematics Education. 1977. Vol. 8, N 1. P. 57—61.

57. Swetz F. Some not so random thoughts about the history of mathematics — its teaching, learning, and textbooks // Primus. 1995. Vol. 5, N 2. P. 97—107.

58. Tzanakis C., Thomaidis Y. Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks // For the Learning of Mathematics. 2000. Vol. 20, N 1. P. 44—55.

59. Wilson P. S., Chauvot J. B. Who? How? What? A Strategy for Using History to Teach Mathematics // Mathematics Teacher. 2000. Vol. 93, N 8. P. 642—645.

Поступила в редакцию 07.07.2021

Зубова Инна Каримовна, кандидат физико-математических наук, доцент
Оренбургский государственный университет
Российская Федерация, 460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13
E-mail: zubova-inna@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-0771-2719

Игнатушина Инесса Васильевна, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент
Оренбургский государственный педагогический университет
Российская Федерация, 460014, г. Оренбург, ул. Советская, 19
E-mail: streleec@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-9641-9962

UDC 372.8:514.7

I. K. Zubova
I. V. Ignatushina

Historical and scientific information as one of the means of mastering the basic sections of mathematical analysis by students

The article discusses an algorithm for the inclusion of historical and scientific information in teaching mathematical analysis to students. In the context of this work, this information serves as a means of mastering the basic sections of mathematical analysis. The didactic and educational aspects of the use of information on the history of mathematical analysis in teaching bachelors are shown. The authors of the article share their positive experience of using historical and scientific information in the process of teaching mathematical analysis. Specific examples from practice presented here concerning such sections as “Integral Calculus”, “Series Theory”, “Differential Equations” are the result of many years of teaching this discipline in technical and pedagogical universities. The results of the experiment show that using historical and scientific facts in the process of teaching mathematical analysis the teacher not only demonstrates to the students the various aspects of the development of the corresponding section of mathematics, but also facilitates the understanding of the educational material, makes it possible to get acquainted with the laboratory of scientific creativity.

Key words: historical and mathematical information, the study of mathematical analysis, ascertaining and forming experiments, the effectiveness of the developed algorithm.

Zubova Inna Karimovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Orenburg State University
Russian Federation, 460018, Orenburg, pr-t Pobedy, 13
E-mail: zubova-inna@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-0771-2719

Ignatushina Inessa Vasilievna, Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Orenburg State Pedagogical University
Russian Federation, 460014, Orenburg, ul. Sovetskaya, 19
E-mail: streleec@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-9641-9962

References

1. Bespal’ko V. P. *Slagaemye pedagogicheskoi tekhnologii* [Components of pedagogical technology]. Moscow, Pedagogika Publ., 1989. 192 p. (In Russian)

2. Bobynin V. V. *Filosofskoe, nauchnoe i pedagogicheskoe znachenie istorii matematiki* [Philosophical, scientific and pedagogical significance of the history of mathematics]. Moscow, Redaktsiya zhurnala “Fiziko-matematicheskie nauki v ikh nastoyashchem i proshedshem” Publ., 1886. 40 p. (In Russian)

3. Burova H. A. *Kurs istorii matematiki kak faktor gumanizatsii i gumanitarizatsii matematicheskogo obrazovaniya v pedagogicheskom vuze: dis. … kand. ped. nauk* [The course of the history of mathematics as a factor of humanization and humanitarization of mathematical education in a pedagogical university. Cand. Dis.]. Novosibirsk, 2000. 196 p. (In Russian)

4. Gil’mullin M. F. *Formirovanie istoricheskogo komponenta matematiko-metodicheskoi kul’tury studentov pri obuchenii istorii matematiki v pedagogicheskom vuze: dis. … kand. ped. nauk* [Formation of the historical component of students’ mathematical and methodological culture in teaching the history of mathematics at a pedagogical university. Cand. Dis.]. Yaroslavl, 2009. 230 p. (In Russian)

5. Drobyshev Yu. A. Formirovanie gotovnosti bakalavrov — budushchikh uchitelei matematiki k realizatsii razdela “Matematika v istoricheskom razvitii” [Formation of readiness of bachelors — future teachers of mathematics for the implementation of the section “Mathematics in historical development”]. *Continuum. Matematika. Informatika. Obrazovanie — Continuum. Maths. Computer Science. Education*, Elets, 2018, no. 4 (12), pp. 53—58. (In Russian)

6. Drobyshev Yu. A. *Mnogourovnevaya istoriko-matematicheskaya podgotovka budushchego uchitelya matematiki: dis. ... d-ra ped. nauk* [Multilevel historical and mathematical training of the future teacher of mathematics. Dr Dis.]. Moscow, 2011. 452 p. (In Russian)

7. Drobyshev Yu. A., Drobysheva I. V. Istoriko-matematicheskaya rekonstruktsiya kak sredstvo effektivnogo obucheniya matematike [Historical and mathematical reconstruction as a means of effective teaching mathematics]. *Matematicheskoe modelirovanie v ekonomike, upravlenii i obrazovanii: sb. nauch. statei po materialam III Mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* [Mathematical modeling in economics, management and education. Collect. of sci. articles based on the materials of the III Internat. sci.-pract. conf.]. Kaluga, 2017, pp. 147—150. (In Russian)

8. Drobyshev Yu. A., Drobysheva I. V. Biografii matematikov: chemu oni uchat studentov [Biographies of mathematicians: what they teach students]. *Kaluzhskii ekonomicheskii vestnik*, 2020, no. 4, pp. 63—65. (In Russian)

9. Drobyshev Yu. A., Drobysheva I. V., Taras O. B. *Vospitanie lichnostnykh kachestv studentov: materialy personalisticheskogo komponenta istorii matematiki* [Education of personal qualities of students: materials of the personalistic component of the history of mathematics]. Moscow, 2017. 288 p. (In Russian)

10. Zhuravleva N. A. *Formirovanie bazovykh klyuchevykh kompetentsii studentov — budushchikh uchitelei matematiki — v protsesse obucheniya matematicheskomu analizu: dis. ... kand. ped. nauk* [Formation of basic key competencies of students — future teachers of mathematics — in the process of teaching mathematical analysis. Cand. Dis.]. Krasnoyarsk, 2012. 213 p. (In Russian)

11. Zadorozhnaya O. V. Metod proektov v obuchenii matematicheskomu analizu [Project method in teaching mathematical analysis]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo — Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 3 (3), pp. 41—46. (In Russian)

12. Zadorozhnaya O. V. Uchebno-nauchnyi proekt kak sposob uglubleniya i rasshireniya znanii po matematicheskomu analizu [Educational and research projects as a way to deepen and expand the knowledge of mathematical analysis]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo — Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod. Ser. Social Sciences*, 2017, no. 1 (45), pp. 160—166. (In Russian)

13. Zadorozhnaya O. V. Osnovy proektnoi deyatel’nosti na zanyatiyakh po matematicheskomu analizu [Fundamentals of project activities in a mathematical analysis class]. *Uchenye zapiski. Elektronnyi zhurnal Kurskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2016, no. 3 (39). Available at: https://api-mag.kursksu.ru/api/v1/get_pdf/1974/ (In Russian)

14. Zadorozhnaya O. V. *Proektirovanie kompleksa uchebnykh proektov v protsesse obucheniya matematicheskomu analizu v universitete: dis. ... kand. ped. nauk* [Designing a complex of educational projects in the process of teaching mathematical analysis at the university. Cand. Dis.]. Nizhnii Novgorod, 2011. 237 p. (In Russian)

15. Zubova I. K. Ob ispol’zovanii nekotorykh istoriko-nauchnykh svedenii v kursakh vysshei matematiki dlya studentov tekhnicheskikh spetsial’nostei [On the use of some historical and scientific information in higher mathematics courses for students of technical specialties]. *Istoriya i metodologiya nauki: mezhvuz. sb. nauch. tr.* [History and methodology of science. Interuniversity collection of scientific works]. Perm, Permskii un-t Publ., 2002, is. 9, pp. 85—90. (In Russian)

16. Zubova I. K. Zadacha o kolebanii struny v trudakh L. Eilera [The problem of string vibrating in the works of L. Euler]. *Iz istorii matematiki XVIII veka. K predstoyashchemu 300-letnemu yubileyu Leonarda Eilera (1707—1783)* [From the history of mathematics in the 18th century. For the upcoming 300th anniversary of Leonard Euler (1707—1783)]. Orenburg, OGPU Publ., 2000, is. 1, pp. 39—49. (In Russian)

17. Zubova I. K., Ignatushina I. V. O primenenii istoriko-nauchnogo materiala pri izlozhenii kursa matematicheskogo analiza v tekhnicheskom universitete [On the use of historical and scientific material in the presentation of the course of mathematical analysis at a technical university]. *Formirovanie professional’noi kul’tury spetsialistov XXI veka v tekhnicheskom universitete: tr. 6-i mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* [Formation of

professional culture of specialists of the XXI century at a technical university. Proceed. of the 6th Internat. sci.-pract. conf.]. St. Petersburg, SPbGPU Publ., 2006, pp. 156—165. (In Russian)

18. Zubova I. K., Ignatushina I. V. *Ryady. Obzor teorii i istorii ee formirovaniya* [Rows. Review of the theory and history of its formation]. Orenburg, OGPU Publ., 2005. 59 p. (In Russian)

19. Zubova I. K., Ostraya O. V. Primenenie elementov istorii matematiki pri izlozhenii temy “Formula Teilora” v kurse matematicheskogo analiza [Application of elements of the history of mathematics in the presentation of the topic “Taylor’s formula” in the course of mathematical analysis]. *Trudy X Mezhdunarodnykh Kolmogorovskikh chtenii: sbornik statei* [Proceedings of the X International Kolmogorov readings. Collection of articles]. Yaroslavl, YaGPU Publ., 2012, pp. 233—236. (In Russian)

20. Ignatushina I. V. O primenenii istoricheskogo materiala na prakticheskikh zanyatiyakh po vysshei matematike pri izuchenii integral’nogo ischisleniya [On the use of historical material in practical classes in higher mathematics in the study of integral calculus]. *Formirovanie professional’noi kul’tury spetsialistov XXI veka v tekhnicheskom universitete: trudy 4-i mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* [Formation of professional culture of specialists of the XXI century at a technical university. Proceed. of the 4th Internat. sci.-pract. conf.]. St. Petersburg, SPbGPU Publ., 2004, pp. 254—256. (In Russian)

21. Ignatushina I. V. O predystorii differentsial’nogo i integral’nogo ischisleniya [On the prehistory of differential and integral calculus]. *Istoriya i filosofiya nauki: sbornik nauch. statei* [History and philosophy of science. Collection of sci. articles]. Orenburg, OGPU Publ., 2005, is. 5, pp. 152—165. (In Russian)

22. Ignatushina I. V. Ob istorii razvitiya ponyatiya funktsii (zadacha o kolebanii struny) [On the history of the development of the concept of a function (the problem of the vibration of a string)]. *Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta — Vestnik of Orenburg State Pedagogical University*, 2000, no. 5 (20), pp. 24—31. (In Russian)

23. Kalinin S. I. *Metodicheskaya sistema obucheniya studentov pedvuza differentsial’nomu i integral’nomu ischisleniyu funktsii v kontekste fundamentalizatsii obrazovaniya: dis. … d-ra ped. nauk* [Methodical system of teaching students of a pedagogical institute of differential and integral calculus of functions in the context of fundamentalization of education. Dr Dis.]. Moscow, 2010. 318 p. (In Russian)

24. Kalinin S. I. *Obuchenie studentov matematicheskomu analizu v usloviyakh fundamentalizatsii vysshego pedagogicheskogo obrazovaniya* [Teaching students mathematical analysis in the context of fundamentalization of higher pedagogical education]. Kirov, VyatGGU Publ., 2008. 353 p. (In Russian)

25. Kalinin S. I. O predmete matematicheskogo analiza [About the subject of mathematical analysis]. *Informatika. Matematika. Yazyk: nauch. zhurn.* Kirov, VyatGGU Publ., 2008, is. 5, pp. 170—174. (In Russian)

26. Kalinin S. I. O printsipakh otbora soderzhaniya obucheniya matematicheskomu analizu studentov matematicheskikh spetsial’nostei [On the principles of selection of the content of teaching mathematical analysis of students of mathematical specialties]. *Matematika. Obrazovanie: materialy XV Mezhdunar. konf.* [Mathematics. Education. Proceed. of the XV Internat. conf.]. Cheboksary, Chuvash. un-t Publ., 2007, pp. 66. (In Russian).

27. Kalinin S. I. Evristiki v soderzhanii obucheniya studentov matematicheskikh spetsial’nostei differentsial’nomu i integral’nomu ischisleniyu [The heuristics in content of the teaching students of mathematical specialties the foundations of the differential and integral calculus]. *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta — Herald of Vyatka State University*, 2008, no. 2 (1), pp. 126—134. (In Russian)

28. Kon’kova M. I. *Obuchenie osnovam differentsial’nogo ischisleniya studentov tekhnicheskikh napravlenii podgotovki s oporoi na obraznye predstavleniya: dis. … kand. ped. nauk* [Teaching the basics of differential calculus for students of technical areas of training based on figurative representations. Cand. Dis.]. Oryol, 2013. 183 p. (In Russian)

29. Kuznetsova N. E. *Formirovanie sistemy ponyatii pri obuchenii khimii* [Formation of a system of concepts in teaching chemistry]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1989. 145 p. (In Russian)

30. Kuryachenko T. P. *Formirovanie priemov poiskovo-issledovatel’skoi deyatel’nosti budushchikh uchitelei matematiki v protsesse obucheniya matematicheskomu analizu: dis. … kand. ped. nauk* [Formation of methods of search and research activities of future teachers of mathematics in the process of teaching mathematical analysis. Cand. Dis.]. Omsk, 2006. 234 p. (In Russian)

31. Mel’nikov R. A., Savvina O. A. U istokov prepodavaniya matematicheskogo analiza v Rossii: obzor perevodov evropeiskikh avtorov [At the origins of traditions of teaching mathematical analysis in Russia: a review of translations of books by European authors]. *Psikhologiya obrazovaniya v polikul’turnom prostranstve. Elets — Psychology of Education in a Multicultural Space*, 2014, no. 3 (27), pp. 116—124. (In Russian)

32. Mikhailova I. A. *Tekhnologiya istorizatsii shkol'nogo matematicheskogo obrazovaniya: dis. ... kand. ped. nauk* [The technology of historization of school mathematics education. Cand. Dis.]. Rostov-on-Don, 2005. 257 p. (In Russian)

33. Nefedova A. S. *Razvitie informatsionnoi kompetentnosti studentov zaochnykh otdelenii pedagogicheskikh vuzov v protsesse obucheniya matematicheskomu analizu: dis. ... kand. ped. nauk* [Development of information competence of students of correspondence departments of pedagogical universities in the process of teaching mathematical analysis. Cand. Dis.]. Yekaterinburg, 2011. 217 p. (In Russian)

34. Polyakova T. S. *Istoriko-metodicheskaya podgotovka uchitelei matematiki v pedagogicheskom universitete: dis. ... d-ra ped. nauk* [Historical and methodological training of teachers of mathematics at the pedagogical university. Dr Dis.]. Rostov-on-Don, 1998. 457 p. (In Russian)

35. Rassokha E. N. O teoretizatsii vtuzovskikh uchebnikov po matematicheskomu analizu [Historical analysis of the mathematical knowledge theorization of institutional textbooks on mathematical analysis]. *Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo universiteta — Vestnik of the Orenburg State University,* 2011, no. 10 (129), pp. 272—276. (In Russian)

36. Rodzhers L. Istoricheskaya rekonstruktsiya matematicheskogo znaniya [Historical reconstruction of mathematical knowledge]. *Matematicheskoe obrazovanie*, Moscow, 2001, no. 16, pp. 74—85. (In Russian)

37. Romanov Yu. V. *Teoriya i metodika istorizatsii geometricheskoi podgotovki uchitelya matematiki v pedagogicheskom vuze: dis. ... kand. ped. nauk* [Theory and methodology of historization of geometric training of a teacher of mathematics in a pedagogical university. Cand. Dis.]. Rostov-na-Donu, 2002. 240 p. (In Russian)

38. Rybnikov K. A. Ob istoriko-metodologicheskikh osnovakh matematicheskogo obrazovaniya uchitelei [On the historical and methodological foundations of mathematical education for teachers]. *Matematika v shkole*, 1981, no. 5, pp. 31—33; 1982, no. 3, pp. 48—49. (In Russian)

39. Safuanov I. S. *Geneticheskii podkhod k obucheniyu matematicheskim distsiplinam v vysshei pedagogicheskoi shkole: dis. ... d-ra ped. nauk* [Genetic approach to teaching mathematical disciplines in the higher pedagogical school. Abstr. Dr Dis.]. Moscow, 2000. 39 p. (In Russian)

40. Smirnov E. I., Shabalina A. I. Printsip variativnosti v proektirovanii spiralei fundirovaniya znanii po matematicheskomu analizu [The principle of variability in the design of the spirals of founding knowledge in mathematical analysis]. *Trudy VII Mezhdunarodnykh Kolmogorovskikh chtenii: sbornik statei* [Proceedings of the VII International Kolmogorov readings. Collection of articles]. Yaroslavl, YaGPU Publ., 2009, pp. 306—318. (In Russian)

41. Sokolova A. N. *Metodika ispol'zovaniya komp'yuternogo eksperimenta v protsesse prepodavaniya matematicheskogo analiza v usloviyakh modul'noi sistemy obucheniya: dis. ... kand. ped. nauk* [Methods of using a computer experiment in the process of teaching mathematical analysis in a modular training system. Cand. Dis.]. Moscow, 2012. 153 p. (In Russian)

42. Tasmuratova S. S. *Metodicheskie osnovy intensifikatsii obucheniya po kursu matematicheskogo analiza v pedvuze: dis. ... kand. ped. nauk* [Methodological foundations of the intensification of training in the course of mathematical analysis at the pedagogical university. Cand. Dis.]. Moscow, 1997. 174 p. (In Russian)

43. Tomilova A. E. *Metodika otbora soderzhaniya kursa istorii matematiki i ego realizatsii v pedagogicheskom vuze: dis. ... kand. ped. nauk* [Methodology for selecting the content of the history of mathematics course and its implementation in a pedagogical university. Cand. Dis.]. Arkhangelsk, 1998. 230 p. (In Russian)

44. Khamov G. G. Elementy istorizma v spetsdistsiplinakh i ikh rol' v professional'noi podgotovke budushchego uchitelya matematiki [Elements of historicism in special disciplines and their role in the professional training of the future teacher of mathematics]. *Istoriya nauki v vuze i v shkole: sbornik nauch. trudov* [History of science at the university and at school. Collection of scientific works]. Murmansk, MGPI Publ., 1996, is. 3, pp. 9—13. (In Russian)

45. Charalambous C., Panaoura A., Phillippou G. Using the history of mathematics to induce changes in pre-service teachers' beliefs and attitudes: Insights form evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics*, 2009, vol. 71, no. 2, pp. 161—180. DOI: 10.1007/s10649-008-9170-0.

46. Clark K., Kjeldsen T., Schorcht S., Tzanakis C., Wang X. History of mathematics in mathematics education. Recent developments. *History and Pedagogy of Mathematics*, 2016. Jul. hal-01349230. Available at: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01349230.

47. Fauvel J. Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 1991, vol. 11, no. 2, pp. 3—6.

48. Fried M. N. Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science and Education*, 2001, no. 10, pp. 391—408.

49. Furinghetti F. Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 2007, vol. 66, no. 2, pp. 131—143. DOI: 10.1007/s10649-006-9070-0.

50. Galante D. The use of the history of mathematics in the teaching pre-service mathematics teachers. *REDIMAT*, 2014, vol. 3, no. 2, pp. 110—120.

51. Goktepe1 S., Ozdemir A. S. An example of using history of mathematics in classes. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 2013, vol. 1, no. 3, pp. 125—136.

52. Jankvist U. T. An empirical study of using history as a 'goal'. *Educational Studies in Mathematics*, 2010, vol. 74, no. 1, pp. 53—74. DOI: 10.1007/s10649-009-9227-8.

53. Jankvist U. T. A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 2009, vol. 71, no. 3, pp. 235—261.

54. Liu P. Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *Mathematics Teacher*, 2003, vol. 96, no. 6, pp. 416—421.

55. Marshall G., Rich B. The role of history in a mathematics class. *Mathematics Teacher*, 2000, vol. 93, no. 8, pp. 704—706.

56. McBride C. C., Rollins J. H. The Effects of History of Mathematics on Attitudes toward Mathematics of College Algebra Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1977, vol. 8, no. 1, pp. 57—61.

57. Swetz F. Some not so random thoughts about the history of mathematics — its teaching, learning, and textbooks. *Primus*, 1995, vol. 5, no. 2, pp. 97—107.

58. Tzanakis C., Thomaidis Y. Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics*, 2000, vol. 20, no. 1, pp. 44—55.

59. Wilson P. S., Chauvot J. B. Who? How? What? A Strategy for Using History to Teach Mathematics. *Mathematics Teacher*, 2000, vol. 93, no. 8, pp. 642—645.